

# Appunti di Elaborazione numerica dei segnali

---

## Argomenti introduttivi

Premesse sui sistemi lineari .....	1
Risposta all'impulso .....	1
Sviluppo in serie di Fourier .....	4
<i>Dimostrazione della formula dei coefficienti dello sviluppo di Fourier per <math>x(t)</math> reale</i>	5
Trasformata di Fourier .....	6
Spettri bilateri e spettri unilateri .....	7
<i>Rappresentazione mediante vettori rotanti</i> .....	9

### PREMESSE SUI SISTEMI LINEARI

Ricordiamo che un **sistema dinamico tempo-continuo** è sempre descrivibile mediante un *sistema di equazioni differenziali*. Il fatto che si usino equazioni differenziali deriva dal fatto che il sistema ha **memoria**: si pensi ad una semplice rete elettrica contenente condensatori ed induttori (cioè appunto elementi dotati di memoria). Se, invece, il sistema non contiene elementi dotati di memoria, allora esso può essere descritto da un *sistema di equazioni algebriche*: si pensi ad una rete elettrica composta solo da elementi resistivi (resistori, diodi, trasformatori ideali). A noi interessano solo sistemi dotati di memoria.

Una fondamentale proprietà di un sistema è la linearità: un sistema si dice **lineare** se e solo se gli può essere applicato il noto **principio di sovrapposizione degli effetti**, vale a dire le proprietà di additività e di omogeneità.

Altra proprietà importante è la tempo-invarianza: se il sistema mantiene invariate nel tempo le proprie caratteristiche, allora si dice che **tempo-invariante**. Da un punto di vista pratico, la tempo-invarianza del sistema si manifesta nel fatto che i coefficienti delle equazioni differenziali che descrivono il sistema sono costanti.

E' importante osservare che un generico sistema può non dipendere solamente dal tempo, ma anche da un numero qualsiasi di altre **variabili indipendenti**: se così è, l'uscita del sistema avrà sia delle derivate rispetto al tempo sia delle derivate rispetto alle altre variabili indipendenti; si tratterà perciò di **derivate parziali**. Se, invece, la variabile indipendente è una sola (generalmente il tempo, ma può anche trattarsi di qualcos'altro), allora le derivate sono totali.

### RISPOSTA ALL'IMPULSO

La proprietà di linearità ha una notevole importanza, in un sistema, in quanto consente di semplificare l'analisi del sistema stesso in base al seguente ragionamento: dato il nostro sistema, supponiamo di avere un ingresso  $e(t)$  e di voler calcolare la corrispondente risposta; anziché ripetere lo stesso calcolo ogni volta, cioè per ogni possibile ingresso  $e(t)$ , è molto comodo rappresentare l'ingresso  $e(t)$  come combinazione lineare di opportuni **segnali elementari** rispetto ai quali si

conosca la risposta del sistema: in questo modo, infatti, la risposta ad  $e(t)$  sarà ottenuta come sovrapposizione delle risposte ai singoli segnali elementari.

Si pone allora il problema di quali segnali elementari scegliere. Uno di questi è sicuramente il noto **impulso di Dirac**, indicato con  $\delta(t)$ . A tal proposito, è bene ricordare che il  $\delta(t)$  non è propriamente una funzione, ma una *distribuzione*; ciò significa che esso ha senso solo se si trova all'interno di un integrale: infatti, la definizione del rigorosa  $\delta(t)$  fa riferimento a quel particolare segnale tale che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0)$$

Questa relazione deriva dal fatto che  $\delta(t)$  è un impulso, centrato in  $t=0$ , di base infinitesima e di area infinita<sup>1</sup>.

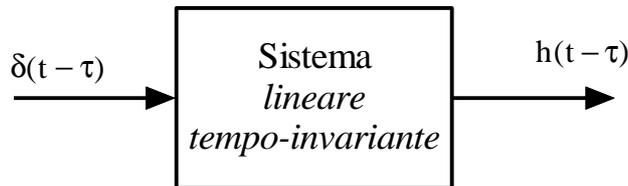
Naturalmente, possiamo anche spostare l'impulso, applicandolo, anziché in  $t=0$ , in un generico istante  $\tau$ : una diretta conseguenza di quella relazione è che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - \tau) f(t) dt = f(\tau)$$

Usiamo dunque l'impulso di Dirac, applicato in un generico istante  $\tau$ , come ingresso al nostro sistema lineare e calcoliamo la corrispondente risposta<sup>2</sup>: la indichiamo genericamente con  $h(t, \tau)$ , per sottolineare il fatto che essa dipende, in generale, da  $\tau$  nonché ovviamente dal tempo.



Se il sistema è tempo-invariante, è ovvio che la risposta del sistema non può dipendere dagli istanti  $t$  e  $\tau$  in modo assoluto, ma solo dalla loro distanza, per cui la risposta sarà in questo caso  $h(t - \tau)$ :



Dobbiamo ora capire come sfruttare  $h(t - \tau)$  per calcolare la risposta del sistema (lineare tempo-invariante) al generico ingresso  $e(t)$ .

Se noi consideriamo un impulso  $\delta(t - t_1)$  applicato in ingresso al sistema in un istante  $t_1$ , avremo una risposta  $h(t - t_1)$ ; se applichiamo un altro impulso  $\delta(t - t_2)$ , avremo una risposta  $h(t - t_2)$  e così via. La risposta del sistema all'ingresso costituito da una combinazione (lineare) di impulsi sarà quindi una combinazione, con gli stessi coefficienti, delle risposte ai singoli impulsi:

<sup>1</sup> Osserviamo inoltre che quell'integrale rappresenta, per semplice definizione, il **prodotto scalare** tra i segnali  $\delta(t)$  ed  $f(t)$ .

<sup>2</sup> che non sarà la cosiddetta **risposta all'impulso** del sistema, che invece è definita solo come la risposta del sistema ad un impulso applicato in  $t=0$ , ossia come risposta a  $\delta(t)$ . Essa si indica con  **$h(t)$**

$$e(t) = \alpha\delta(t - t_1) + \beta\delta(t - t_2) + \gamma\delta(t - t_3) + \dots \longrightarrow u(t) = \alpha h(t - t_1) + \beta h(t - t_2) + \gamma h(t - t_3) + \dots$$

Il segnale di ingresso  $e(t)$  sarà composto da infiniti impulsi, applicati ognuno in un istante diverso ed aventi area pari al valore di  $e(t)$  in quello stesso istante; la risposta complessiva sarà allora ottenuta come somma delle infinite risposte, vale a dire come integrale<sup>3</sup> delle risposte:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(t - \tau)h(\tau)d\tau$$

A ben vedere, questa è la nota formula di convoluzione tra l'ingresso  $e(t)$  e la funzione di risposta all'impulso  $h(t)$  del sistema:

$$u(t) = e(t) * h(t)$$

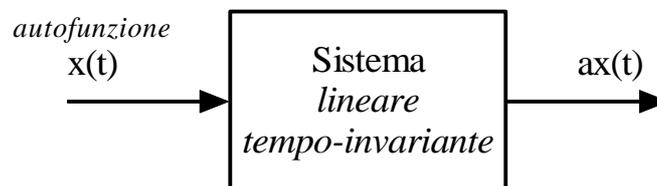
A titolo di richiamo, ricordiamo che il prodotto di convoluzione gode della proprietà commutativa, per cui risulta

$$u(t) = e(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(t - \tau)h(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau)h(t - \tau)d\tau = h(t) * e(t)$$

Per passare dall'uno all'altro integrale basta operare un cambio di variabile.

A questo punto, ha senso chiedersi se questo modo di procedere per calcolare l'uscita del generico sistema lineare tempo-invariante sia effettivamente comodo oppure no. In effetti la risposta è no, dato che non sempre il calcolo dell'integrale di convoluzione è agevole. Si può allora provare a dare, del segnale generico in ingresso, un'altra descrizione, possibilmente più comoda di quella come somma di infiniti impulsi.

Si tratta cioè di scegliere un altro tipo di funzioni elementari. Si possono ad esempio utilizzare le cosiddette **autofunzioni** del sistema: si tratta di segnali con la particolarità che, entrando in ingresso al sistema, ne escono identici, salvo un fattore di scala (reale o complesso).



Classici esempi di autofunzioni, per un sistema lineare, sono le **funzioni sinusoidali**: se mandiamo in ingresso una sinusoide ad una determinata frequenza, possiamo ottenere in uscita soltanto la stessa sinusoide, con solo una variazione di ampiezza e/o di fase<sup>4</sup>. Talvolta ci si esprime

<sup>3</sup> Il fatto che ci sia un integrale da calcolare è sempre legato al fatto che il sistema presenta una memoria, per cui la risposta in un dato istante non dipende solo dal valore dell'ingresso in quell'istante, ma anche dai valori in un certo numero di istanti precedenti.

<sup>4</sup> Sappiamo infatti che un sistema lineare non può generare in uscita componenti spettrali a frequenza diversa da quelle ingresso. Questa caratteristica compete solo ai sistemi non lineari

dicendo che la risposta del sistema ad una certa frequenza è **disaccoppiata** dalle risposte del sistema a tutte le altre frequenze.

N.B. Possiamo osservare due cose:

- in primo luogo, per i sistemi non lineari, le sinusoidi non sono affatto delle autofunzioni: pensiamo ad esempio ad un sistema con caratteristica quadratica;
- in secondo luogo, per i sistemi lineari, ci possono essere funzioni diverse dalle sinusoidi ma che rappresentano ugualmente delle autofunzioni: per esempio, se consideriamo un derivatore e gli mandiamo in ingresso il segnale  $e^{\alpha t}$ , ricaviamo in uscita  $\alpha e^{\alpha t}$ , cioè un segnale identico all'ingresso, salvo il fattore di scala  $\alpha$ .

*Possiamo dunque pensare di descrivere il generico segnale in ingresso come sovrapposizione di frequenze e ampiezze opportune, invece che come sovrapposizione di impulsi, ottenendo ancora una volta che l'uscita sarà una sovrapposizione delle risposte alle singole componenti in ingresso. Il vantaggio, rispetto all'uso degli impulsi, è che non dobbiamo più usare una integrazione, dato appunto il disaccoppiamento tra le uscite. Questo tipo di composizione è quella effettuata dall'analisi di Fourier.*

## SVILUPPO IN SERIE DI FOURIER

Consideriamo un generico segnale  $x(t)$  continuo: esso si dice **periodico** quando si ripete uguale ogni intervallo di tempo di ampiezza fissa  $T$  (**periodo**):

$$x(t) = x(t + nT) \quad \text{con } n \in \mathbb{N} \text{ e } T > 0$$

Si dimostra che questo segnale, oltre che con la sua normale rappresentazione analitica, è esprimibile anche con il seguente sviluppo in serie, detto appunto **serie di Fourier**:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n e^{j2\pi f_n t}$$

dove  $f_n = n/T$ .

I coefficienti di questo sviluppo hanno la seguente espressione:

$$x_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi f_n t} dt$$

In pratica, abbiamo espresso  $x(t)$ , come si diceva nel paragrafo precedente, come somma di infinite sinusoidi (ciascuna pesata da un proprio coefficiente), espresse ciascuna in termini di esponenziale complesso (cioè come un vettore rotante). Non solo, ma tali sinusoidi non sono di periodo qualsiasi, ma di periodo multiplo del periodo  $T$  del segnale  $x(t)$  originario.

E' ovvio che la possibilità di usare una simile rappresentazione di  $x(t)$  presuppone la possibilità di calcolare gli  $x_n$ , ossia di risolvere l'integrale riportato nell'ultima formula.

Inoltre, trattandosi di una serie, la serie di Fourier può convergere o meno. Noi riterremo sempre verificata la convergenza, il che equivale a dei requisiti tutt'altro che stringenti per il segnale  $x(t)$  (che può essere, in generale, sia reale sia complesso).

Per quanto riguarda specificamente i coefficienti dello sviluppo, generalmente sono complessi e possiamo subito vedere perché: se noi applichiamo le formule di Eulero

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

abbiamo che

$$e^{-j2\pi ft} = \cos(2\pi ft) - j\sin(2\pi ft)$$

per cui, andando a sostituire nell'espressione di  $x_n$  otteniamo

$$x_n = \underbrace{\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(2\pi f_n t) dt}_{\text{Re}(x_n)} + j \underbrace{\left( -\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin(2\pi f_n t) dt \right)}_{\text{Im}(x_n)}$$

e questo ci conferma che, in generale, gli  $x_n$  sono dei numeri complessi.

### ***Dimostrazione della formula dei coefficienti dello sviluppo di Fourier per $x(t)$ reale***

Sempre a proposito dei coefficienti, cerchiamo subito di renderci conto come si arriva alla loro espressione. Possiamo partire considerando un particolare integrale:

$$\int_{-T/2}^{T/2} e^{j2\pi \frac{1}{T} nt} e^{-j2\pi \frac{1}{T} mt} dt$$

Senza scendere nei dettagli analitici<sup>5</sup>, si può dimostrare (usando le formule di Eulero per esplicitare i due esponenziali e considerando la parità della funzione Coseno e la disparità della funzione Seno) che questo integrale può assumere soltanto due valori, a seconda dei valori di  $m$  e di  $n$  (entrambi numeri interi):

$$\int_{-T/2}^{T/2} e^{j2\pi \frac{1}{T} nt} e^{-j2\pi \frac{1}{T} mt} dt = \begin{cases} T & \text{se } m = n \\ 0 & \text{se } m \neq n \end{cases}$$

Questo risultato proviene dalla ortogonalità delle funzioni esponenziali considerate in quell'integrale.

<sup>5</sup> per i quali si rimanda a quanto visto nel corso di Teoria dei Segnali

Possiamo allora facilmente sfruttare questo risultato: per prima cosa, considerando lo sviluppo di Fourier di  $x(t)$ , moltiplichiamo ambo i membri per  $e^{-j2\pi\frac{1}{T}mt}$ , ottenendo

$$x(t)e^{-j2\pi\frac{1}{T}mt} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n e^{j2\pi\frac{1}{T}nt} e^{-j2\pi\frac{1}{T}mt}$$

Adesso integriamo tra  $-T/2$  e  $T/2$ , in modo da ottenere a secondo membro proprio l'integrale citato prima:

$$\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-j2\pi\frac{1}{T}mt} dt = \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n e^{j2\pi\frac{1}{T}nt} e^{-j2\pi\frac{1}{T}mt} dt$$

Portando fuori dall'integrale la sommatoria e portando successivamente fuori dall'integrale anche il generico  $x_n$ , otteniamo che

$$\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-j2\pi\frac{1}{T}mt} dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-T/2}^{T/2} x_n e^{j2\pi\frac{1}{T}nt} e^{-j2\pi\frac{1}{T}mt} dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \int_{-T/2}^{T/2} e^{j2\pi\frac{1}{T}nt} e^{-j2\pi\frac{1}{T}mt} dt$$

L'integrale a secondo membro è, come detto, proprio quello citato prima; allora, considerando che abbiamo infiniti integrali, per  $n$  che va da  $-\infty$  a  $+\infty$ , è evidente che l'unico non nullo (ma paria  $T$ ) è quello che si ottiene per  $n=m$ , per cui scriviamo che

$$\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-j2\pi\frac{1}{T}mt} dt = x_m T$$

Da qui si ottiene l'espressione del generico coefficiente dello sviluppo in serie, per cui abbiamo ottenuto quello che volevamo.

## TRASFORMATA DI FOURIER

Se il segnale  $s(t)$  considerato non è più periodico (il che si può anche esprimere dicendo che il periodo  $T$  tende all'infinito), lo sviluppo in serie di Fourier subisce delle modifiche: infatti, considerando  $T \rightarrow \infty$ , la sommatoria si trasforma in un integrale, con l'accortezza che tale integrale non necessariamente converge:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f)e^{j2\pi ft} df$$

Nel passaggio dalla sommatoria all'integrale, in pratica continuiamo a descrivere  $x(t)$  come combinazione di funzioni base sinusoidali, ma con due differenze: in primo luogo, cambiamo i coefficienti di peso; in secondo luogo, non consideriamo più frequenze con valori discrete, ma tutte le possibili frequenze tra  $-\infty$  e  $+\infty$ .

I coefficienti di peso sono adesso rappresentati da  $S(f)$ , cioè appunto dalla **trasformata di Fourier** di  $s(t)$ . Tali coefficienti si calcolano tramite un integrale del tutto simile a quello usato per i coefficienti dello sviluppo di Fourier:

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

Questa è la nota **formula di trasformazione secondo Fourier**, mentre la precedente era la **formula di antitrasformazione di Fourier**.

Ovviamente, affinché la rappresentazione di  $s(t)$  mediante la trasformata di Fourier sia possibile, l'integrale nell'ultima formula deve convergere. La condizione per tale convergenza è che  $s(t)$  sia un segnale ad **energia finita**, il che significa che la quantità

$$E_s = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt$$

deve essere un numero reale non nullo.

Il concetto di fondo, circa l'applicazione della trasformata di Fourier, non cambia rispetto ai paragrafi precedenti: volendo calcolare la risposta del sistema ad un generico segnale (periodico o meno), è sufficiente conoscere come risponde il sistema ad una sinusoide di frequenza  $f$  (se il sistema è lineare, esso non farà altro che cambiare ampiezza e fase della sinusoide in ingresso, lasciando invece inalterata la frequenza); nota questa informazione, la risposta del sistema all'ingresso  $s(t)$  sarà data dalla relazione

$$U(f) = S(f)H(f)$$

(valida ovviamente nel dominio della frequenza), dove  $S(f)$  è la trasformata del segnale in ingresso, mentre  $H(f)$  è il fattore moltiplicativo complesso che tiene conto della variazione di fase e di ampiezza introdotte dal sistema. Nota  $U(f)$ , il calcolo di  $u(t)$  si ottiene tramite antitrasformazione.

## SPETTRI BILATERI E SPETTRI UNILATERI

L'estensione dello spettro di un segnale a frequenze negative non aggiunge alcuna informazione alla conoscenza del segnale stesso. Il perché è nella nota proprietà della trasformata di Fourier in base alla quale  $S(-f) = S^*(f)$ : questa proprietà dice, in pratica, che, noto lo spettro per frequenze positive, quello per frequenze negative si ottiene come suo complesso coniugato.

Il motivo per cui si usa l'estensione a frequenze negative è che sommando degli esponenziali con esponente immaginario si ottiene un risultato reale (formule di Eulero). Cerchiamo allora di approfondire questo concetto.

Per prima cosa, ricordiamo la cosiddetta **forma esponenziale** dello sviluppo in serie di Fourier di un segnale periodico di periodo  $T$ :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n e^{j2\pi f_n t}$$

Il segnale  $x(t)$  in questione è espresso, in questo caso, come somma di infiniti termini esponenziali complessi del tipo  $e^{j2\pi f_n t}$ : separando i termini per  $n < 0$ ,  $n = 0$  e  $n > 0$ , abbiamo quanto segue:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{-1} x_n e^{j2\pi f_n t} + x_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} x_n e^{j2\pi f_n t}$$

A parte il termine in continua  $x_0$ , abbiamo esponenziali complessi a frequenza positiva e esponenziali complessi a frequenza negativa; non solo, ma ci possiamo ricordare della nota proprietà secondo cui  $x_n = (x_{-n})^*$ : in base a questa proprietà, per ogni esponenziale a frequenza positiva  $x_n e^{j2\pi f_n t}$ , c'è sempre il corrispondente complesso coniugato  $x_n^* e^{-j2\pi f_n t}$  a frequenza negativa.

Questo è dunque un primo modo di esprimere il generico segnale periodico, cioè come somma di esponenziali complessi: questo costringe ad usare sia le frequenze positive sia quelle negative.

Se, invece di ricorrere alla somma degli esponenziali, si ricorre alla somma di coseni e seni, lo spettro viene definito soltanto per frequenze positive, incluso lo zero. Infatti, considerando che, in base alle formule di Eulero, risulta  $e^{j2\pi f t} = \cos(2\pi f t) + j\sin(2\pi f t)$ , possiamo scrivere che

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n e^{j2\pi f_n t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n (\cos(2\pi f_n t) + j\sin(2\pi f_n t)) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \cos(2\pi f_n t) + j \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \sin(2\pi f_n t)$$

Inoltre, se tiriamo fuori dalle due sommatorie il termine che si ottiene per  $n=0$  otteniamo

$$x(t) = [x_0 \cos(2\pi f_0 t) + x_0 \sin(2\pi f_0 t)] + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} x_n \cos(2\pi f_n t) + j \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} x_n \sin(2\pi f_n t)$$

Ma, ricordando che  $f_n = n/T$ , è evidente che  $f_0 = 0$ , per cui

$$x(t) = x_0 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} x_n \cos(2\pi f_n t) + j \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} x_n \sin(2\pi f_n t)$$

Questa è un'altra espressione, detta **trigonometrica**, dello sviluppo in serie di Fourier di un segnale periodico. Essa è assolutamente equivalente a quella esponenziale e, per il momento, mantiene il fatto di usare le frequenze negative.

D'altra parte, se poniamo

$$c_n = \frac{2}{T} \left| S\left(\frac{n}{T}\right) \right| \quad \text{e} \quad \varphi_n = \text{ph} \left[ S\left(\frac{n}{T}\right) \right]$$

si dimostra che lo sviluppo può anche essere espresso come

$$x(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(2\pi f_n t + \varphi_n)$$

Come anticipato prima, abbiamo dunque una somma di segnali sinusoidali reali a tutte e sole le frequenze positive, inclusa quella nulla.

Riepiloghiamo allora nel modo seguente: l'uso delle funzioni esponenziali (e quindi delle frequenze negative) è più comodo nei calcoli, che risultano più semplici<sup>6</sup>, ma ha l'inconveniente di richiedere, per ogni effettiva frequenza (cioè per ogni effettiva oscillazione sinusoidale), due punti sull'asse delle frequenze, simmetricamente allocati rispetto all'origine.

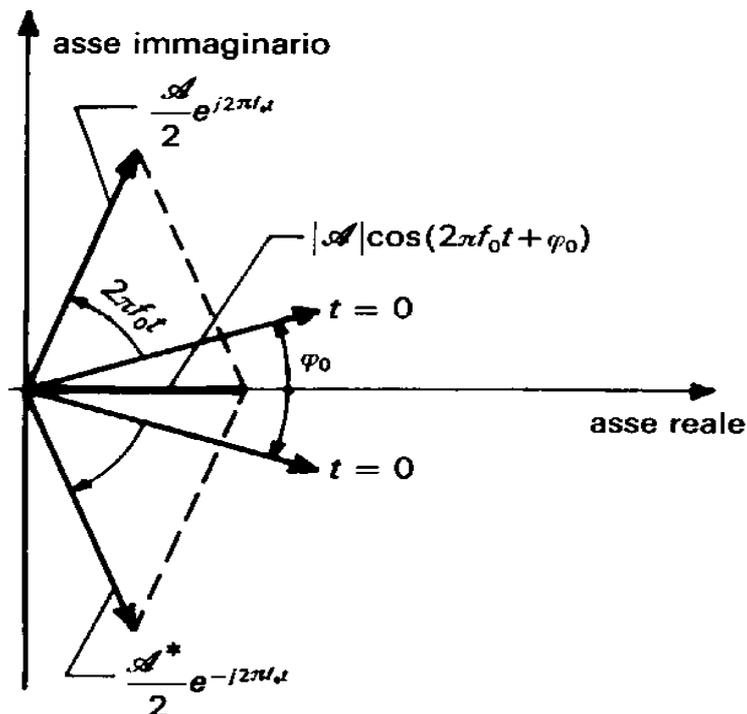
A chiarimento ulteriore di questo concetto, basta considerare un segnale periodico puramente sinusoidale, ad esempio un Coseno: applicando le formule di Eulero, possiamo scrivere che

$$\cos(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2} e^{j2\pi f_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j2\pi f_0 t}$$

Il primo membro rappresenta il segnale come una sinusoide reale, mentre il secondo membro rappresenta lo stesso identico segnale come somma di due esponenziali complessi coniugati. Per la rappresentazione reale, consideriamo la sola frequenza  $f_0$  positiva del segnale, mentre per la rappresentazione esponenziale dobbiamo considerare sia  $f_0$  sia  $-f_0$ .

### Rappresentazione mediante vettori rotanti

L'uso delle funzioni esponenziali, pur presentando il difetto di dover considerare le frequenze negative, conduce, d'altra parte, ad una semplice rappresentazione grafica delle grandezze sinusoidali:



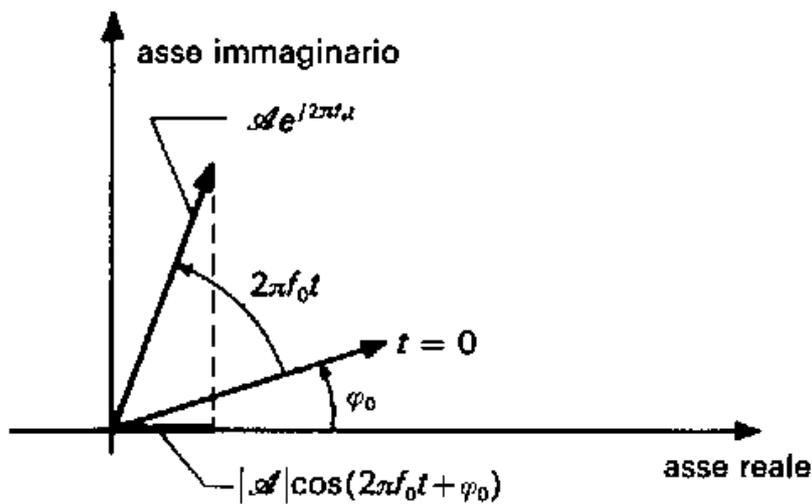
<sup>6</sup> Pensiamo ad esempio a come si faciliti il calcolo della derivata o dell'integrale di un segnale: ad una derivazione nel tempo corrisponde, nel dominio delle frequenze, una moltiplicazione per  $j2\pi f$ , mentre ad una integrazione nel tempo corrisponde una divisione per  $j2\pi f$ .

In un piano complesso, in cui l'asse orizzontale è l'asse dei segnali reali, una funzione sinusoidale del tipo

$$s(t) = |A| \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0) = \frac{A}{2} e^{j2\pi f_0 t} + \frac{A^*}{2} e^{-j2\pi f_0 t}$$

viene rappresentata da due **vettori simbolici ruotanti**. All'istante  $t=0$ , i due vettori rappresentano, semplicemente,  $A/2$  e  $A^*/2$  rispettivamente; per gli istanti  $t>0$ , i due vettori rappresentano invece  $\frac{A}{2} e^{j2\pi f_0 t}$  e  $\frac{A^*}{2} e^{-j2\pi f_0 t}$ . Il vettore risultante è reale ed ha appunto il valore  $|A| \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0)$ .

L'inconveniente di dover usare gli esponenziali, e quindi due vettori, si supera, nella normale pratica, usando un solo vettore, cioè un solo esponenziale: precisamente, si considera l'esponenziale  $Ae^{j2\pi f_0 t}$ , con la convenzione che il segnale da esso rappresentato sia la proiezione del vettore medesimo sull'asse reale, ossia appunto il suo valore reale:



Questa operazione equivale, in pratica, a scrivere che

$$s(t) = |A| \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0) = \text{Re} [ Ae^{j2\pi f_0 t} ]$$

Questa rappresentazione è, per la sua comodità, quella più diffusa.

A questo punto, ci possiamo chiedere se la rappresentazione delle grandezze sinusoidali nella forma  $\text{Re} [ Ae^{j2\pi f_0 t} ]$  sia estendibile anche alla serie di Fourier ed alla trasformata di Fourier di un segnale arbitrario (periodico nel caso della serie di Fourier). La risposta è ovviamente positiva: in particolare, con riferimento alla antitrasformata di Fourier di uno spettro  $S(f)$ , possiamo scrivere che

$$s(t) = \text{Re} \left[ 2 \int_{0^+}^{+\infty} S(f) e^{j2\pi f t} df \right]$$

Notiamo subito che l'estremo inferiore di integrazione è  $0^+$ : questo è dovuto alle cautele con cui si deve trattare la componente continua ( $f=0$ ), che è infatti l'unica frequenza che non ha, in  $S(f)$ , due componenti simmetriche rispettivamente a destra ed a sinistra dell'origine.

Se, per ovviare all'inconveniente, si ipotizza che anche a frequenza 0 si abbiano due componenti (rispettivamente a frequenze  $0^+$  e  $0^-$ ), allora si può anche prendere direttamente 0 come estremo di integrazione:

$$s(t) = \operatorname{Re} \left[ 2 \int_0^{+\infty} S(f) e^{j2\pi ft} df \right]$$

A questo punto, possiamo definire uno **spettro monolatero** del segnale  $s(t)$ , intendendolo come il doppio dello spettro bilatero. Per questioni di comodità, si indica generalmente con  $\check{S}(f)$  lo spettro bilatero considerato fino ad ora e con  $S(f)$  quello monolatero appena introdotto: risulterà dunque

$$S(f) = 2\check{S}(f) \quad f \in [0^+, +\infty[$$

Facendo questa convenzione di simbologia, la formula circa l'antitrasformata di Fourier diventa la seguente:

$$s(t) = \operatorname{Re} \left[ \int_0^{+\infty} S(f) e^{j2\pi ft} df \right]$$

In conclusione, l'uso degli spettri bilateri  $\check{S}(f)$  è comodo ai fini dei calcoli e consente di procedere con sicurezza, in particolare quando ci si riferisce ad operazione non lineari come ad esempio il prodotto. Al contrario, lo spettro unilatero  $S(f)$  ha il vantaggio di una notevole semplificazione grafica e di una maggiore evidenza fisica, dato che mostra direttamente quello che accade alle effettive frequenze fisiche. In virtù di questi fatti, nei nostri discorsi useremo principalmente gli spettri e le densità spettrali monolatero nelle formule e nelle figure, mentre invece faremo i calcoli generalmente con spettri e densità bilatero.

Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**

e-mail: [sandry@iol.it](mailto:sandry@iol.it)

sito personale: <http://users.iol.it/sandry>

succursale: <http://digilander.iol.it/sandry1>