Lezione 3

Calcolo delle probabilità

Definizione di probabilità

La probabilità è lo studio degli esperimenti casuali e non deterministici

Se lanciamo un dado sappiamo che cadrà ma non è certo che esca il numero 6

Se lo lanciamo 1000 volte però sappiamo che il 6 uscirà all'incirca 1/6 delle volte

Definizione di probabilità

Definendo con s il numero dei successi (eventi favorevoli) e con n il numero di prove (eventi possibili) abbiamo che la frequenza

$$f=s/n$$

diventa uguale alla probabilità di avere un successo al crescere di n

successo= uscita di un 6

s=numero di volte che esce 6

n= numero di lanci

Definizione di probabilità

P=n di eventi favorevoli/n di eventi possibili

Dado

eventi favorevoli: 6

eventi possibili: 1,2,3,4,5,6

$$P(6)=1/6$$

Definizione di probabilità

P=n di eventi favorevoli/n di eventi possibili

Dado: prob che esca un numero pari

eventi favorevoli: 2,4,6

eventi possibili: 1,2,3,4,5,6

$$P(6)=3/6=1/2$$

Definizione di probabilità

P=n di eventi favorevoli/n di eventi possibili

In una classe ci sono 10 M e 20 F.

Se interrogo a caso che probabilità ho di interrogare un M?

N° di eventi favorevoli: 10

N° di eventi possibili:30

P(6)=10/30=1/3

Definizione di probabilità

P=n di eventi favorevoli/n di eventi possibili

In una classe ci sono 10 M di cui 2 biondi e 20 F di cui 5 bionde.

Se interrogo a caso che probabilità ho di interrogare un biondo? E un M biondo? E una F bruna?

Definizione di probabilità

1. Biondo: ci sono 7 soggetti biondi su 30

P=7/30

2. M biondo: ci sono 2 M biondi su 30

P=2/30

3. F bruna: ci sono 15 F brune su 30:

P=15/30

Definizione di probabilità

P=n di eventi favorevoli/n di eventi possibili

Moneta: prob che su 3 lanci io ottenga 3 T

eventi favorevoli: TTT

eventi possibili: TTT, TTC, TCT, CTT, CCT, CTC, TCC, CCC

P(TTT)=1/8

Definizione di probabilità

P=n di eventi favorevoli/n di eventi possibili

Moneta: prob che su 3 lanci io ottenga 2 T

eventi favorevoli: TTC, TCT, CTT

eventi possibili: TTT, TTC, TCT, CTT, CCT, CTC, TCC, CCC

P(2T)=3/8

Definizione di probabilità

Lancio un Dado: prob che esca 7?

eventi favorevoli:-

eventi possibili: 1,2,3,4,5,6

$$P(7)=0 \text{ evento impossibile}$$

Dado: prob che esca un numero <7?

eventi favorevoli:1,2,3,4,5,6

eventi possibili: 1,2,3,4,5,6

$$P(<7)=1 \text{ evento certo}$$

Regola della somma

Se A e B sono due eventi mutuamente esclusivi (se si verifica A non si verifica B e viceversa), la probabilità che si verifichi

A o B è p(A)+p(B)

cioè

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

Regola della somma

La probabilità di fare un numero minore di 3 lanciando un dado (cioè fare 1 o 2) è:

$p(1)+p(2)=1/6+1/6=1/3$

Regola della somma

In Italia le prob di avere i vari gruppi sanguigni sono le seguenti:

P(A)=0.40, p(B)=0.10, p(AB)=0.04, p(0)=0.46

Qual è la prob di essere A o B?

P(A o B)=0.40+0.10=0.50

Regola della somma

Se due eventi non sono mutuamente esclusivi allora:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

bisogna sottrarre la prob che si verifichino contemporaneamente

Regola della somma

P=n di eventi favorevoli/n di eventi possibili

In una classe ci sono 10 M di cui 2 biondi e 20 F di cui 5 bionde.

Se interrogo a caso che probabilità ho di interrogare un M oppure un biondo?

P(M)=10/30

P(biondo)=7/30

P(M biondo)=2/30

Regola della somma

Se interrogo a caso che probabilità ho di interrogare un M oppure un biondo?

P(M o biondo)=10/30+7/30-2/30=15/30

Eventi indipendenti

Due eventi si dicono indipendenti se il verificarsi di uno non influenza la probabilità di verificarsi dell'altro.

Es prob di avere un maschio come primo figlio =51.4%

prob di avere un maschio come secondo figlio =51.4%

Eventi indipendenti

Se due eventi sono indipendenti

$P(A \cap B) = p(A) * p(B)$

La probabilità che si verifichino entrambi è data dal prodotto della prob

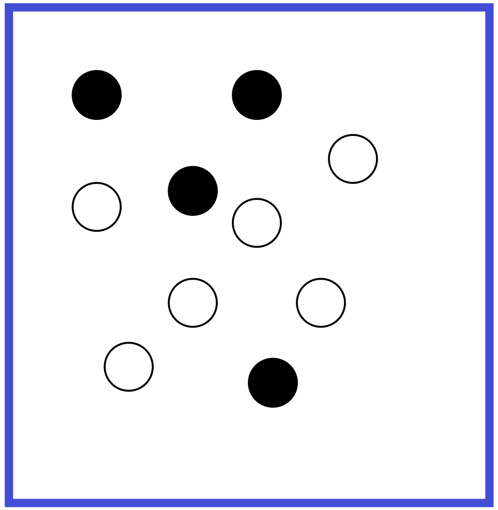
$P(B|A) = p(B)$ e $P(A|B) = p(A)$

Eventi indipendenti

Se due eventi non sono indipendenti

$P(A \cap B) = p(A) * p(B|A) = p(B) * P(A|B)$

Eventi indipendenti



P(B)=6/10

P(N)=4/10

Se estraggo con reinserimento due estrazioni consecutive sono indipendenti

Se estraggo senza reinserimento due estrazioni consecutive non sono indipendenti

Eventi indipendenti

1. Campionamento <u>con reinserimento</u>:

estraggo 2 palline; qual è la prob che siano entrambe bianche?

$P(B1)=6/10$ $\qquad$ $P(B2|B1)=P(B2)=6/10$

$$P(B1 \cap B2)=3/5*3/5=9/25$$

Eventi indipendenti

1. Campionamento <u>senza reinserimento</u>: estraggo 2 palline; qual è la prob che siano entrambe bianche?

$P(B1)=6/10$ $\qquad$ $P(B2|B1)=5/9$

$$P(B1 \cap B2)=3/5*5/9=1/3$$

Notazioni

$n! = 1*2*3*....*n$

$0! = 1$

$a^n = a*a*a*....$ (n volte)

$a^0 = 1$

Distribuzioni di probabilità

Esistono delle distribuzioni di probabilità analitiche che descrivono la probabilità del verificarsi di eventi di particolare natura

Distribuzione binomiale

Distribuzione di Poisson

Distribuzione Gaussiana

Distribuzione binomiale

Eventi binari:

Es: esito del lancio di una moneta (T o C)
avere una malattia (sano o malato)
sesso (M o F)

Descrive la probabilità di ottenere k successi su n prove, se la probabilità di successo è p.

Distribuzione binomiale

Descrive la probabilità di ottenere k successi su n prove, se la probabilità di successo è p.

Es: esito del lancio di una moneta (T o C)

Definisco successo la T

P(T)=0.50

Qual è la prob di avere k teste su n lanci?

Distribuzione binomiale

P(T)=0.50

Qual è la prob di avere k teste su n lanci?

k=1

n=3

TTT, TTC, TCT, CTT, TCC, CTC, CCT, CCC

8 casi possibili

TCC, CTC, CCT

3 casi favorevoli

P=3/8

Distribuzione binomiale

P(T)=0.50

Qual è la prob di avere k teste su n lanci?

k=6

n=10

$$\Pr(k,n,p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots\ldots \cdot n$$

Distribuzione binomiale

P(T)=0.50

Qual è la prob di avere k teste su n lanci?

k=6

n=10

$$\Pr(6,10,0.5) = \binom{10}{7} 0.5^7 (1-0.5)^{10-7}$$

$$\binom{10}{7} = \frac{10!}{7!(10-7)!}$$

Distribuzione di Poisson

Eventi rari: (ciasun evento ha una bassa probabilità di verificarsi)

Es: particelle che colpiscono un rilevatore

numero di carie che colpiscono un paziente

Descrive la probabilità di osservare k eventi in un intervallo di tempo se il numero medio è μ.

Distribuzione di Poisson

Descrive la probabilità di osservare k eventi in un intervallo di tempo se il numero medio è μ.

So che in media un maschio adulto sviluppa 0.5 carie all'anno

Arriva un paziente che non vedo da un anno. Che probabilità ho di trovare 1 carie nuova? E 2 nuove? E nessuna?

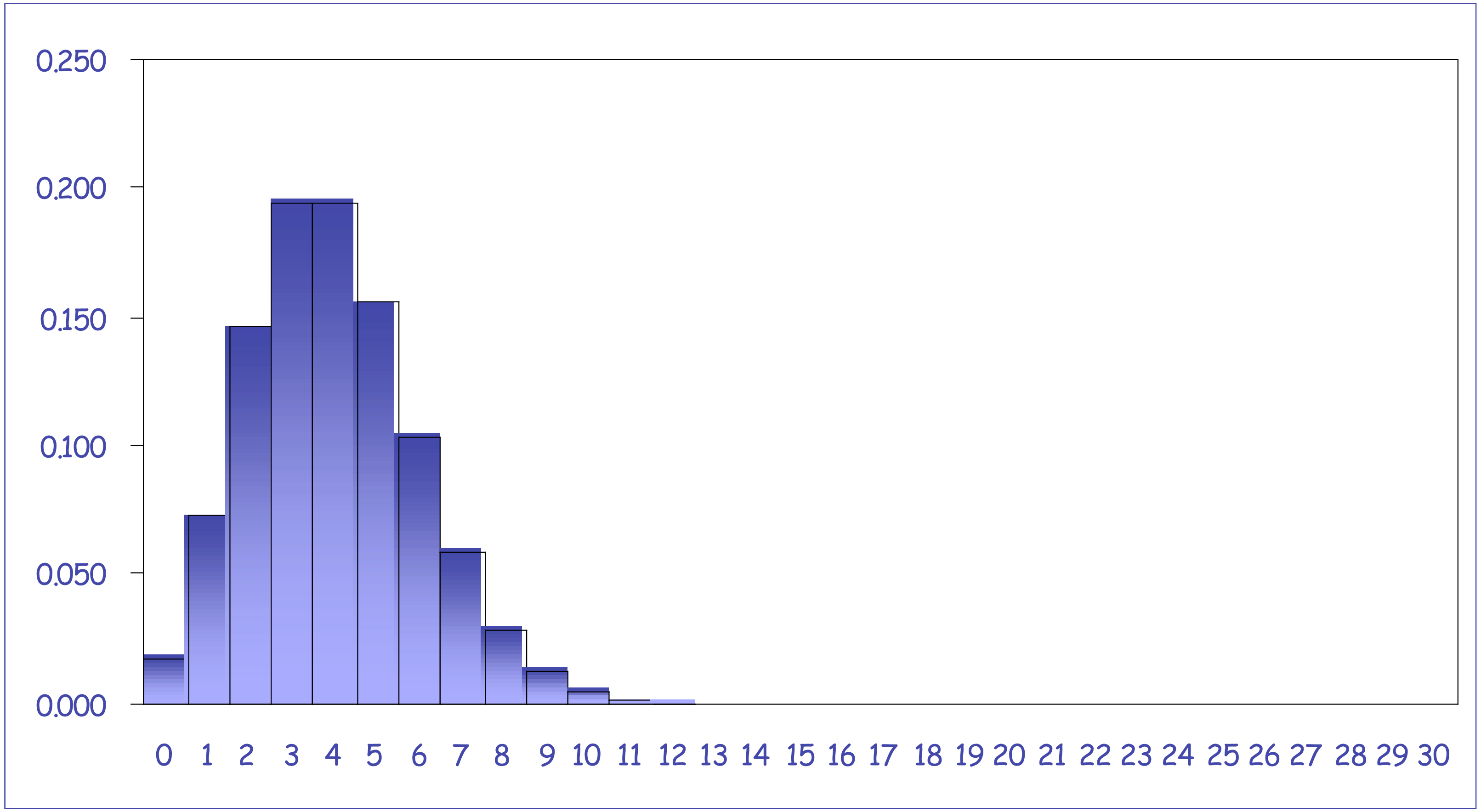
Distribuzione di Poisson

μ=0.5

$$\Pr(k) = \frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!}$$

Pr(0) =	1*exp(-0.5)/1 =	0.60
Pr(1) =	0.5*exp(-0.5)/1=	0.30
Pr(2) =	$(0.5)^2$*exp(-0.5)/2=	0.076

Distribuzione di Poisson



$\mu=5$ Vedi file Poisson.xls

Distribuzione Gaussiana

La distribuzione Gaussiana è la distribuzione più "famosa" su cui si basano molti metodi statistici

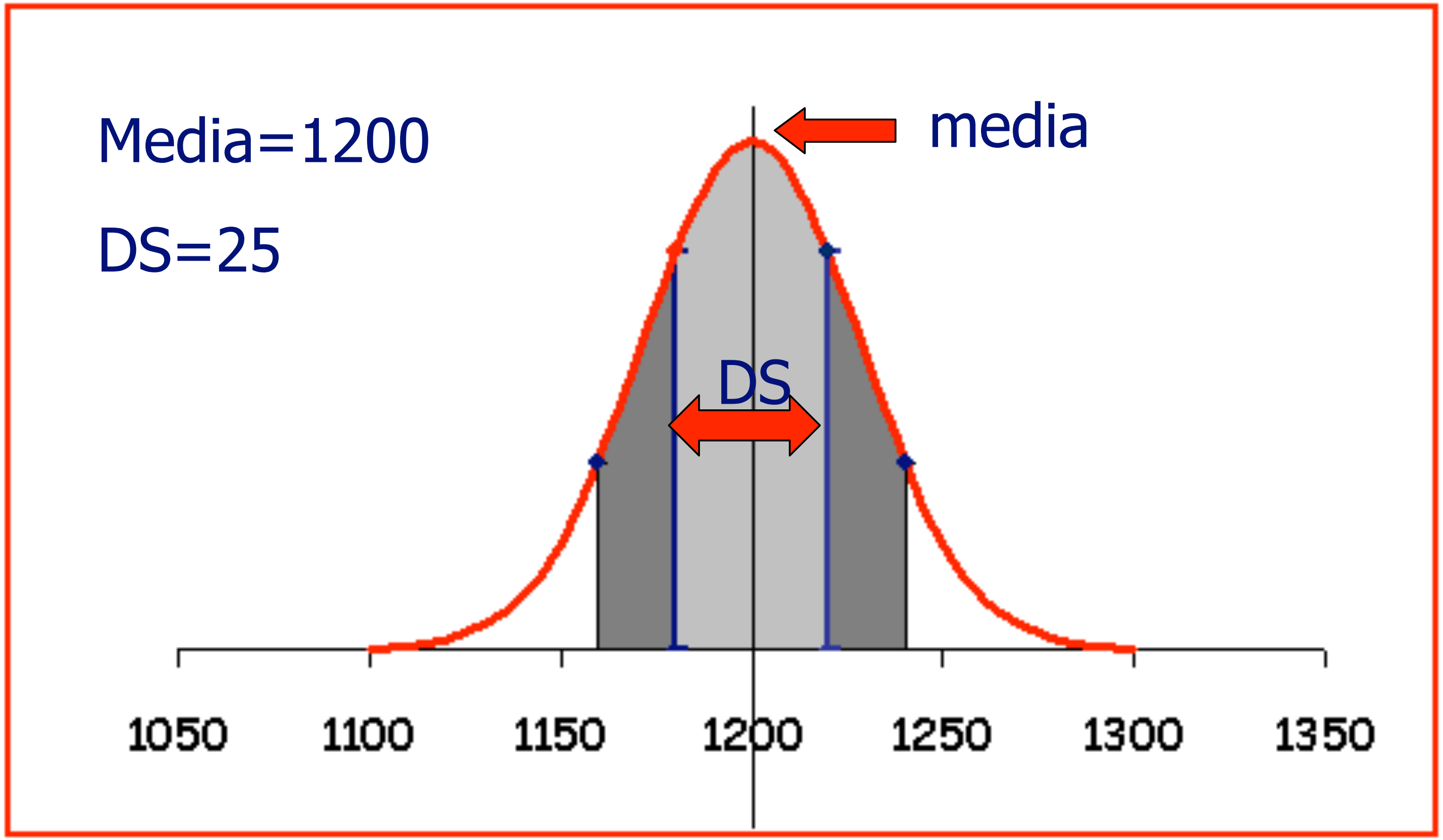
E' la distribuzione degli errori casuali di misure continue

Distribuzione Gaussiana

$$Norm(\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

Dipende da due parametri, la media e la deviazione standard (DS)

Distribuzione Gaussiana

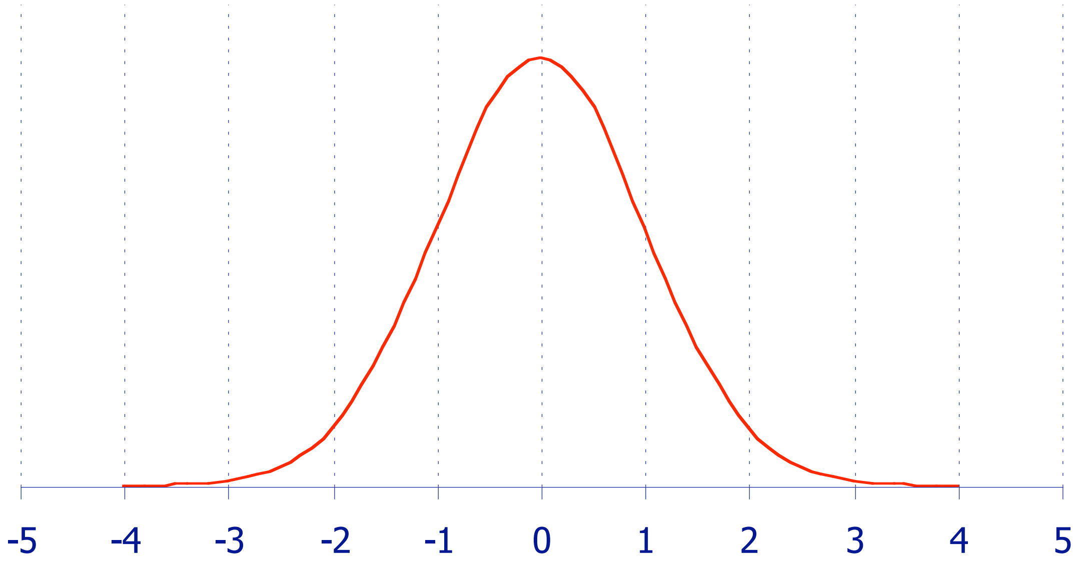


Vedi file Gaussiana.ssc

Gaussiana standardizzata

La distribuzione Gaussiana standardizzata è una gaussiana con:

$$\mu = 0 \qquad SD = 1$$



Gaussiana standardizzata

I valori di probabilità per ciascun valore di una variabile z distribuita secondo una gaussiana standardizzata sono stati tabulati.

Vedi tavole interattive

Gaussiana standardizzata

Data una variabile x distribuita secondo una distribuzione gaussiana qualsiasi esiste il modo di trasformarla in modo da "riportarla" su una gaussiana standardizzata:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

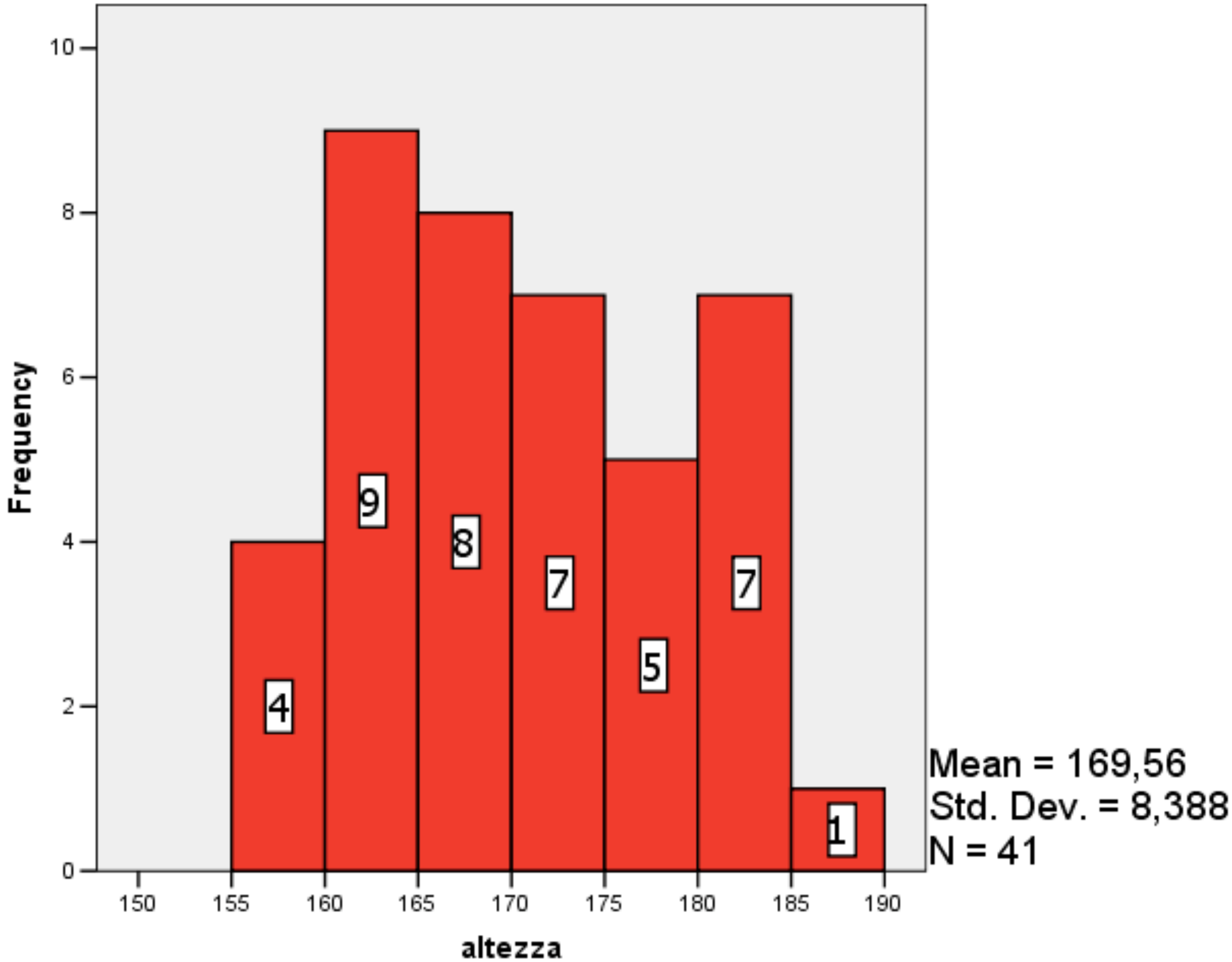
Gaussiana standardizzata

Esempio: la variabile x è distribuita come una gaussiana con media=100 e DS=20. Che probabilità ha il valore x=120?

Trasformo x in una variabile gaussiana standardizzata:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{120 - 100}{20} = \frac{20}{20} = 1$$

Esercizio



10
8
6
4
2
0
Frequency
9
8
7
7
5
4
1
150
155
160
165
170
175
180
185
190
altezza
Mean = 169,56
Std. Dev. = 8,388
N = 41

Esercizio

Questo è l'istogramma delle altezze degli igienisti dentali, dei dietisti e degli odontoiatri.

Che probabilità ho di trovare uno studente più alto di 180 cm?

E di trovarne uno di altezza tra i 165 e i 180 cm?

E uno più basso di 160 cm?

Esercizio

Tre cavalli, A,B e C sono in gara; la probabilità di vittoria di A è il doppio di quella di B e la probabilità di vittoria di B è il doppio di quella di C.

1. Quali sono le rispettive probabilità di vittoria, e cioè p(A), p(B) e p(C)? (Chiamate p(C)=p)

2.Qual è la probabilità che vinca B oppure C? (P(B o C)).

Esercizio

Su 120 studenti 60 studiano francese, 50 studiano spagnolo e 20 li studiano entrambi.Uno studente viene scelto a caso: determinare la probabilità che

a) studi il francese o lo spagnolo

b) non studi né il francese né lo spagnolo

Esercizio

Tutti gli alunni maschi della quinta elementare di una certa scuola hanno un peso medio di 36 Kg con una SD=6. Sapendo che la distribuzione dei pesi è all'incirca gaussiana:

a. estraendo a caso un alunno è più probabile estrarne uno che pesa più di 40Kg o uno che pesa meno di 30Kg?

b. estraendo a caso un alunno che probabilità ho di estrarne uno che pesa più di 42 Kg?

Esercizio

In un campione casuale di 3015 ragazzi di 11 anni l'altezza media è risultata 146 cm con DS di 8 cm.

1. Un ragazzo è alto 170 cm; quante DS è sopra la media?
2. Un altro è alto 148 cm; quante DS è sopra la media?
3. Un altro è 1.5 DS sotto la media. Quanto è alto?
4. Qui sono riporatate le altezze di 4 ragazzi: 150 cm, 130 cm, 165 cm, 140 cm. Quale definizione è più appropraita per ciascuno? :
   insolitamente basso
   nella media
   insolitamente alto

Giustificate le risposte.

Varianza di una proporzione

La varianza di una variabile x binaria (0/1) che ha una proporzione p di 1 è

$$Var(x)=p(1-p)$$

Verificarlo sulla variabile sesso, supponendo che a questo corso ci siano 2M e 17F.