Università degli studi di Brescia
Facoltà di Medicina e Chirurgia
Corso di Laurea in Infermieristica

Corso propedeutico di Matematica e Informatica
a.a. 2008/2009
Docente

Ing. Andrea Ghedi

# Lezione 3

# LE EQUAZIONI DI

# PRIMO GRADO

Corso propedeutico di Matematica e Informatica
a.a. 2008/2009 Ing. Andrea Ghedi

# L'uguaglianza

In matematica un uguaglianza e' un uguale fra due enti esempi possono essere

$$1 + 1 = 2$$

$$125 + 250 = 375$$

$$AB + BC = AC$$

$$a + a + 3a + 2a = 2a + 5a$$

**Regola importante:**

se un'uguaglianza e' vera si comporta come una bilancia a piatti: quello che c'e' su un piatto deve variare come quello che c'e' sull'altro piatto altrimenti la bilancia non e' piu' in equilibrio e l'uguaglianza non e' piu' valida

Tra le varie uguaglianze poi possiamo considerare alcune uguaglianze particolari:

**le identita'**

**le equazioni**

# L’identità

Un'identita' e' una uguaglianza in cui compaiono delle lettere e deve succedere che per qualunque valore noi possiamo mettere al posto delle lettere l'uguaglianza deve restare valida:

**Esempio**

$$a + a = 2a$$

e' un'identita' infatti prova a sostituire al posto di a qualunque valore, il primo termine restera' sempre uguale al secondo

sostituisco 3

$$3 + 3 = 2 \cdot 3$$

$$3 + 3 = 6$$

sostituisco 1234

$$1234 + 1234 = 2 \cdot 1234$$

$$1234 + 1234 = 2468$$

e questo va bene per ogni valore

La seguente ad esempio non e' un'identita:

$$\frac{2a}{b} = \frac{a}{b} + \frac{a}{b}$$

perche' al posto di b non posso sostituire il valore 0

# Le equazioni

**Si chiama equazione di primo grado un'uguaglianza che puo' diventare vera sostituendo alla lettera (incognita) un valore particolare detto soluzione**

esempio:

se scrivo

$3x - 6 = 0$

se al posto di x metto il valore 2 l'uguaglianza diventa vera

$3 \cdot 2 - 6 = 0$

$6 - 6 = 0$

$0 = 0$

mentre se metto altri numeri non e' vera

Allora quando avremo un problema, per trovare il valore di un dato che non conosciamo bastera' impostarne l'equazione relativa e risolverla: il valore che mi risolve l'equazione sara' il valore del dato che cerchiamo

Abbiamo detto che le equazioni sono le frasi della matematica: l'equazione precedente dice che devo trovare il numero (e questo vuol dire considerare la x) tale che se dal triplo del numero (3x) tolgo (-) sei (6) ottengo (=) zero (0).

# Primo principio di equivalenza

Il primo principio di equivalenza delle equazioni dice che:
Aggiungendo o sottraendo ad entrambe i membri di un'equazione una stessa quantita' l'equazione resta equivalente alla data

Per membro di un'equazione si intende tutto cio' che c'e' prima dell'uguale (primo membro) e tuto cio' che c'e' dopo l'uguale (secondo membro)

esempio:

$$3x - 6 = 0$$

aggiungo $+6$ da entrambe le parti

intendiamoci: potrei aggiungere o togliere qualunque numero ma io aggiungo il numero (col segno cambiato cosi' va via) che c'e' vicino al termine con la x per rendere l'equazione piu' semplice

ottengo

$$3x - 6 + 6 = 0 + 6$$

$$3x = 6$$

Equivale a dire: in un'equazione posso trasportare da un membro all'altro cambiando di segno il termine trasportato

## Primo principio di equivalenza

Attenzione: l'equazione resta equivalente alla data non significa che l'equazione resta la stessa, ma significa che ha la stessa soluzione: infatti
$3x - 6 = 0$ significa : togliendo 6 dal triplo di un numero ottengo 0
mentre $3x = 6$ significa il triplo di un numero vale 6.
Le due equazioni sono diverse come sono diverse le due frasi, ma entrambe le equazioni hanno la stessa soluzione (in questo caso 2)

Poiche' il primo principio e' scomodo da usare quando abbiamo tanti termini e poiche' bisogna, per risolvere un'equazione, avere i fattori con la x prima dell'uguale e quelli senza la x dopo l'uguale al posto del primo principio si puo' usare questa regola
posso trasportare un termine da una parte all'altra dell'uguale, ma chi salta l'uguale cambia di segno

## Secondo principio di equivalenza

**Il secondo principio di equivalenza delle equazioni dice che: Moltiplicando o dividendo entrambe i membri di un'equazione per una stessa quantita' *diversa da zero* l'equazione resta equivalente alla data**

esempio:

$3x = 6$

divido da entrambe le parti per 3

intendiamoci: potrei dividere per qualunque numero che non fosse zero ma io divido per il numero che c'e' davanti alla x per lasciare la x da sola e cosi' risolvere l'equazione

$$\frac{3x}{3} = \frac{6}{3}$$

semplifico

$x = 2$ e' la soluzione

Il secondo principio sara' utilissimo da usare quando avremo delle equazioni con denominatori numerici. Infatti dopo aver fatto il minimo comune multiplo fra entrambe i membri potro' eliminare i denominatori ( equivale a moltiplicare entrambe i membri dell'equazione per il minimo comune multiplo).

# Equazione di primo grado ad un incognita

Lavoriamo su un esempio: ho l'equazione **$2x - 4 = 8$**

Per risolverla devo trasformarla in qualcosa del tipo
x = soluzione
quindi devo lasciare la x da sola prima dell'uguale cioe' devo togliere di mezzo tutti i termini che sono vicini alla x.
Il primo termine che ammazzero' sara' -4 perche' quello meno legato alla x e per farlo usero' il primo principio di equivalenza
aggiungo da entrambe le parti +4 per eliminare il -4 equivale a trasportare dall'altra parte cambiando di segno

$$2x - 4 + 4 = 8 + 4$$
$$2x = 12$$

Ora devo eliminare il 2 e per eliminare qualcosa in matematica basta fare l'operazione contraria. Il 2 moltiplica la x , quindi per eliminarlo devo dividere per 2 sia prima che dopo l'uguale ( secondo principio di equivalenza)

$$\frac{2x}{2} = \frac{12}{2}$$

**semplifico**

**$x = 6$ e' la soluzione**

# Esercizi

1)
$16x - 14 = 14x - 10$

---

2)
$2(8x - 7) = 5(3x - 2)$

---

3)
$(x + 2)(x - 1) + 2x = 5 - x(4 - x)$

---

4)
$(x - 1)^2 + 2x + 3(x - 1) = (x + 2)^2$

---

5)
$$\frac{x - 1}{2} + \frac{2x + 1}{10} = 2x - 2 + \frac{1 - 3x}{5}$$

---

6)
$$\frac{1}{2} + (x - 1)^2 - \frac{(2x - 1)^2}{3} = \frac{1}{3}(1 - x^2)$$

# Equazione possibile

E' l'equazione vera che afferma cioe' un fatto vero ed unico:

sommando 4 ad un numero ottengo il doppio del numero stesso.

**Con un po' di logica dico che il numero e' 4:**
**infatti 4 + 4 = 8 e questo e' un fatto vero.**
**Se lo traduco in equazione ottengo:**

$$x + 4 = 2x$$

**e risolvendo**

$$x - 2x = -4$$

$$-x = -4$$

$$x = 4$$

**Quando otteniamo la soluzione del tipo** $x = \text{numero}$ **diciamo che l'equazione e' possibile**

# Equazione impossibile

e' l'equazione che afferma un fatto falso:

sommando 3 ad un numero ottengo lo stesso numero

**Pensandoci sopra non posso trovare nessun numero che resti uguale a se' stesso aggiungendovi 3, quindi la mia affermazione e' impossibile**
**se lo traduco in equazione ottengo:**

$$x + 3 = x$$

**e risolvendo**

$$x - x = -3$$

$$0 = -3$$

**quando otteniamo zero uguale a un numero diciamo che l'equazione e' impossibile**

## Equazione indeterminata

E' l'equazione che afferma un fatto vero ma che va bene per infiniti numeri (qualche testo la chiama anche identita')

sommando 5 ad un numero ottengo lo stesso numero aumentato di 5

**e' un fatto vero ma che non mi individua il numero perche' e' vero per qualunque numero**

**se lo traduco in equazione ottengo:**

$$x + 5 = x + 5$$

**e risolvendo**

$$x - x = 5 - 5$$

$$0 = 0$$

**Quando otteniamo zero uguale a zero diciamo che l'equazione e' indeterminata (oppure che e' un'identita').**

Riassumendo:

gli esempi che hai visto sono elementari ma quando ho un'equazione complicata e' quasi impossibile dire senza risolverla se e' possibile, impossibile od indeterminata ed a questo posso risalire solo dalla soluzione:

| | |
|---|---|
| x = numero | Equazione possibile |
| 0 = numero | Equazione impossible |
| 0 = 0 | Equazione indeterminata |

# Equazioni fratte

Un'equazione si dice fratta quando la x compare sotto il segno di frazione.

Al solito, tenendo conto del secondo principio quando faro' il m. c. m. dovro' dire che l'equazione non e' valida per il valore della x che annulla il minimo comune multiplo. Questa si chiama anche **Condizione di Realta' (abbreviata in C.R.)**

Dopo aver risolto l'equazione dovro' controllare il valore della x:
se il valore della x non e' quello che annullava il minimo comune multiplo la soluzione e' accettabile
se il valore trovato e' uguale a quello che annullava il minimo comune multiplo allora dovro' dire che la soluzione **non e' accettabile**

# Equazioni di secondo grado

Corso propedeutico di Matematica e Informatica
a.a. 2008/2009 Ing. Andrea Ghedi

# Equazioni di secondo grado

Un'equazione si dice di secondo grado quando la x vi compare a potenza 2, cioe' c'e' un termine con $x^2$
A seconda dei termini presenti, oltre a quello di secondo grado, le equazioni possono essere suddivise in

- Equazioni pure
- Equazioni spurie
- Equazioni complete

# Equazioni pure

E' l'equazione di secondo grado del tipo:

$$ax^2 + c = 0$$

si ottiene dall'equazione completa $ax^2 + bx + c = 0$ quando manca il termine di primo grado bx

Per risolverla usiamo le regole gia' viste per le equazioni di primo grado:

$ax^2 + c = 0$

per il primo principio di equivalenza trasporto la c dall'altra parte dell'uguale cambiandola di segno

$ax^2 = -c$

dovro' lasciare la x senza altri termini quindi applico il secondo principio dividendo entrambe i termini per a

$$\frac{ax^2}{a} = \frac{-c}{a}$$

$$x^2 = \frac{-c}{a}$$

ora siccome cerco la x mentre ho $x^2$ per fare in modo che $x^2$ diventi x dovro' fare la radice ad entrambe i termini sono radicali algebrici perche' cerchiamo tutti i valori che elevati al quadrato ci danno il radicando quindi ci va il simbol o $\pm$ ma siccome e' un'uguaglianza basta mettere il simbolo solo davanti ad una delle due radici

$$\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{-c/a}$$

$$x = \pm\sqrt{-c/a}$$

le due soluzioni sono

$$x_1 = -\sqrt{-c/a} \qquad x_2 = +\sqrt{-c/a}$$

quando faccio $\sqrt{-c/a}$ non faccio la radice di un numero negativo (non si potrebbe fare perche' nessun numero reale al quadrato mi da' un numero negativo). il segno meno significa semplicemente cambiare il segno di c/a

# Equazioni pure: esempio

Facciamo un esempio

$3x^2 - 12 = 0$

trasporto il -12 dopo l'uguale

$3x^2 = + 12$

per il secondo principio divido entrambe i membri per 3 per liberare $x^2$

$$\frac{3x^2}{3} = \frac{12}{3}$$

$x^2 = 4$

applico la radice ad entrambe i membri

$\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{4}$

$x = \pm\sqrt{4}$

- $x_1 = -2$
- $x_2 = +2$

# Equazioni spurie

E' l'equazione di secondo grado del tipo:

$$ax^2 + bx = 0$$

si ottiene dall'equazione completa $ax^2 + bx + c = 0$ quando manca il termine noto c

Per risolverla trattiamola come un polinomio e scomponiamola:
raccogliamo a fattor comune la x prima dell'uguale
$x ( ax + b) = 0$

il principio di annullamento del prodotto dice che

*un prodotto e' zero se e solo se uno dei suoi fattori e' zero*

siccome devo trovare i valori per cui il prodotto e' zero, per il principio di annullamento del prodotto dovro' porre ogni fattore uguale a zero
quindi

- $x = 0$

- $ax + b = 0$
  $ax = -b$
  $x = -b/a$

le soluzioni sono:

- $x_1 = 0$
- $x_2 = -b/a$

\

$3x^2 - 12x = 0$

raccolgo la x

$x( 3x - 12) = 0$

applico la legge dell'annullamento del prodotto

- $x = 0$

- $3x - 12 = 0$

  $3x = + 12$

  $x = 12/3 = 4$

le soluzioni sono:

- $x_1 = 0$
- $x_2 = 4$

# Equazione di secondo grado completa

E' l'equazione

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Per risolverla basta applicare la formula risolutiva:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

La prima cosa da dire e' che, vista l'importanza della formula, sarebbe bene riscriverla ogni volta che la usi. Cosi', senza troppa fatica l'impari a memoria

# Equazione completa: esempio

Facciamo un esercizio

$x^2 - 5x + 6 = 0$

i coefficienti sono

- $a = 1$
- $b = -5$
- $c = 6$

sostituisco nella formula

$$x_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{[(-5)^2 - 4(1)(6)]}}{2(1)}$$

eseguo i calcoli

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{[25 - 24]}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2}$$

estraggo di radice

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

ora devo fare un bivio scegliendo una volta il meno e l'altra il piu'

- $x_1 = (5 - 1)/2 = 4/2 = 2$
- $x_2 = (5 + 1)/2 = 6/2 = 3$

# Equazione completa:formula ridotta

## Formula ridotta

Si puo' applicare solamente quando il secondo termine e' divisibile per due:

pongo b=2h

$ax^2 + 2hx + c = 0$

in tal caso la formula risolutiva diviene:

$$x_{1,2} = \frac{-h \pm \sqrt{(h^2 - ac)}}{a}$$

la formula ridotta semplifica i calcoli per trovare le soluzioni ed e' conveniente da usare soprattutto quando il termine a vale 1

# Equazione completa:formula ridotta esempio

$x^2 + 6x + 8 = 0$

b vale 6 quindi h (meta' di b) vale 3

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{[(3)^2 - 1 \cdot 8]}}{1}$$

eseguo i calcoli

$x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{(9-8)}$

$x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{1}$

$x_{1,2} = -3 \pm 1$

- $x_1 = -3 + 1 = -2$
- $x_2 = -3 - 1 = -4$

# Equazione completa:il discriminante o Delta

Si definisce discriminante o (delta) il termine che si trova sotto radice nella formula risolutiva dell'equazione di secondo grado.

$$x_{1,2} = \frac{-b \quad (b^2 - 4ac)}{2a}$$

cioe'

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

# Equazione completa:il discriminante o Delta

Siccome il termine e' dentro radice abbiamo tre possibilita':

- il discriminante e' maggiore di zero

  $\Delta = b^2 - 4ac > 0$

  in tal caso posso fare la radice e poiche' devo sommare e sottrarre otterro' due radici reali e distinte

- il discriminante e' uguale a zero

  $\Delta = b^2 - 4ac = 0$

  in tal caso la radice vale zero e poiche' devo sommare e sottrarre zero otterro' due radici uguali (valori reali e coincidenti) e la doppia soluzione vale $-b/2a$

- il discriminante e' minore di zero

  $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

  in tal caso non posso fare la radice nei numeri reali ma solo nei numeri immaginari e poiche' devo sommare e sottrarre otterro' due radici complesse che differiranno solo per il segno in mezzo ai numeri (radici complesse e coniugate)

## Equazione completa:le soluzioni

Regola: un equazione di secondo grado ammette sempre due soluzioni che potranno essere

- reali e distinte se il discriminante e' maggiore di zero
- reali coincidenti se il discriminante e' uguale a zero
- complesse e coniugate se il discriminante e' minore di zero

# Equazione completa:il discriminante o Delta

Siccome il termine e' dentro radice abbiamo tre possibilita':

- il discriminante e' maggiore di zero

  $\Delta = b^2 - 4ac > 0$

  in tal caso posso fare la radice e poiche' devo sommare e sottrarre otterro' due radici reali e distinte

- il discriminante e' uguale a zero

  $\Delta = b^2 - 4ac = 0$

  in tal caso la radice vale zero e poiche' devo sommare e sottrarre zero otterro' due radici uguali (valori reali e coincidenti) e la doppia soluzione vale $-b/2a$

- il discriminante e' minore di zero

  $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

  in tal caso non posso fare la radice nei numeri reali ma solo nei numeri immaginari e poiche' devo sommare e sottrarre otterro' due radici complesse che differiranno solo per il segno in mezzo ai numeri (radici complesse e coniugate)

# FINE