Università degli studi di Brescia
Facoltà di Medicina e Chirurgia
Corso di Laurea in Infermieristica

Corso propedeutico di Matematica e Informatica
a.a. 2008/2009

Docente

Ing. Andrea Ghedi

Docente: Dott. Ing. Andrea Ghedi
Ingegnere Biomedico, specialista in Ingegneria Clinica
Ingegnere clinico c/o Azienda Ospedaliera di Desenzano del Garda
Recapiti:
Ufficio: Dietro direzione ospedaliera, palazzina Villa Andreis 2 c/o Servizio Ingegneria clinica (una volta alla sbarra seguire le frecce)
Tel: 0309145436
Mail: andrea.ghedi@aod.it
Internet: www.andreaghedi.it/corsi.htm
Ricevimento: Al bisogno dello studente, da prenotare via mail almeno due giorni lavorativi prima

DAI
NUMERI NATURALI
AI
NUMERI REALI

Corso propedeutico di Matematica e Informatica
a.a. 2008/2009 Ing. Andrea Ghedi

I numeri naturali

I numeri naturali sono l'insieme di **base** su cui si **costruiscono** tutti gli altri **tipi** di numeri. I numeri naturali
non sono definibili a partire da altri oggetti : essi **sono dati a priori**.

Essi sono i numeri 1, 2, 3, ... ed il loro insieme si indica con la lettera N per cui si ha :

N = {1, 2, 3, ...} .

Le proprietà dei numeri naturali sono tutte riconducibili a 3 assiomi, i cosiddetti **assiomi di Peano** (logico
e matematico italiano, 1858-1932). Essi si possono riassumere in maniera intuitiva nel seguente modo :

- 1 - **esiste il numero 1**

- 2 - **ogni numero naturale possiede un successivo**

- 3 - **ogni numero naturale si ottiene da 1 "contando" in successione**.

Con i numeri naturali si possono eseguire solo le operazioni di **addizione** + e **moltiplicazione** · .

L'operazione di sottrazione non è definibile nell'insieme di numeri naturali perché in esso non sarebbe
una **operazione chiusa**.

Una operazione definita su di un insieme, per essere "**ben definita**" deve avere la proprietà di essere
chiusa, ovvero il **risultato** dell'operazione **deve essere un elemento dell'insieme stesso**. Per esempio,
se eseguo la sottrazione 1 - 2 , il risultato, essendo -1 (cioè negativo), non fa parte dell'insieme in questione.
Per questo motivo, con i numeri naturale si possono fare solo il + ed il -

I numeri Interi

I numeri interi sono definiti **a partire** dai numeri naturali.

Consideriamo il prodotto cartesiano N x N ed **affermiamo** che le coppie :

(1,1), (2,2), (3,3), ...

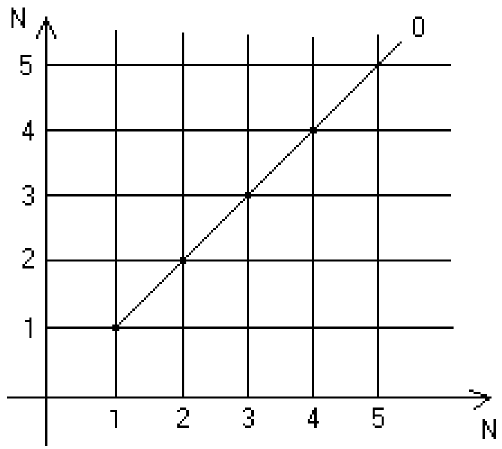
sono **equivalenti** perché, se immaginassimo di fare la **differenza** fra la prima coordinata e la seconda coordinata, otterremo :

1 - 1 = 2 - 2 = 3 - 3 = ... = 0 .

Indichiamo allora con 0 la **classe di equivalenza** formata dalle suddette coppie ordinate. Scriviamo cioè :

[0] = {(1,1), (2,2), (3,3), ...} = 0 .

Graficamente :



I numeri Interi

Analogamente otterremo :

[1] = {(2,1), (3,2), (4,3), ...} = 1

[2] = {(3,1), (4,2), (5,3), ...} = 2

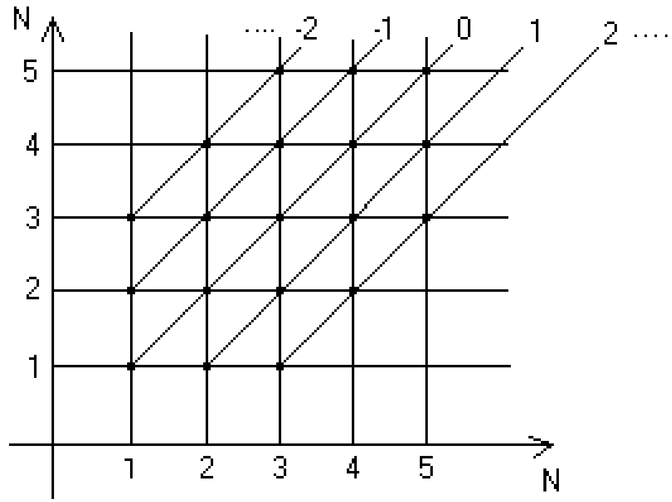
... ...

[-1] = {(1,2), (2,3), (3,4), ...} = -1

[-2] = {(1,3), (2,4), (3,5), ...} = -2

... ...

Graficamente :



Abbiamo così costruito l'insieme dei **numeri interi** a partire dai numeri naturali.

L'insieme dei numeri interi si indica con la lettera I e vale :

$$I = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\} .$$

I numeri Interi

Abbiamo così costruito l'insieme dei **numeri interi** a partire dai numeri naturali.

L'insieme dei numeri interi si indica con la lettera I e vale :

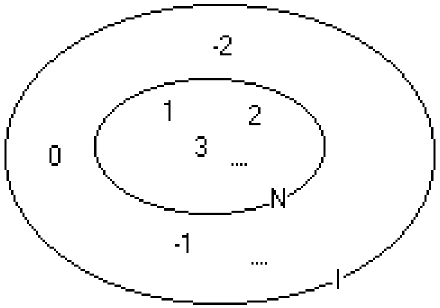
I = {..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...} .

L'insieme dei numeri interi **contiene** l'insieme dei numeri naturali come suo **sottoinsieme proprio** per cui possiamo scrivere :

$$N \subset I$$

e di conseguenza possiamo dire che I è una **estensione** di N .

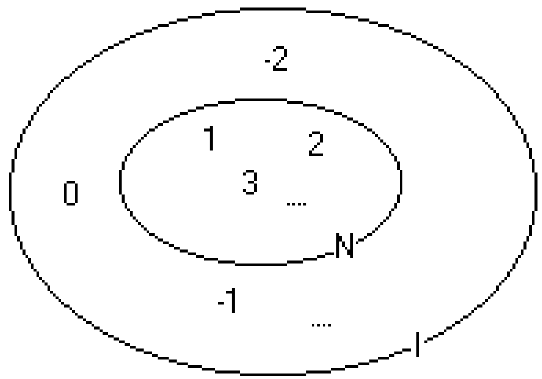
Con i diagrammi di Venn quanto affermato risulta evidente :



I numeri Interi

Con i diagrammi di Venn quanto affermato risulta evidente :

Con i numeri interi si possono fare le operazioni di **addizione +** , **sottrazione**



L'operazione di divisione non è definita sui numeri interi perché la divisione fra due numeri interi non è in generale un numero intero.

I numeri Razionali

Sull'insieme dei numeri interi I = {...,-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...} è possibile eseguire le operazioni + - ·
mentre **non è possibile eseguire l'operazione di divisione** / . Il motivo di questo è dovuto al fatto
che la divisione fra due numeri interi non dà in generale un risultato intero. Per esempio 1 / 2 = 0,5
non è un un numero intero.

Come già affermato, una operazione matematica su un insieme, per essere ben definita, deve essere **chiusa**,
cioè deve essere tale per cui il risultato dell'operazione deve sempre appartenere all'insieme dato.

Vediamo ora come si può introdurre l'operazione di divisione e come questo porti alla creazione di un
nuovo insieme di numeri, l'insieme dei **numeri razionali** Q .

Consideriamo il **prodotto cartesiano** I x I-{0} , ovvero l'insieme di tutte le coppie ordinate (x, y) che
hanno la prima coordinata x appartenente all'insieme dei numeri interi I e la seconda coordinata y
appartenente all'insieme dei numeri interi escluso lo zero I - {0} .

Il perché abbiamo escluso lo zero per la seconda coordinata apparirà chiaro in seguito.

I numeri Razionali

Consideriamo, per esempio, equivalenti le coppie ordinate :

(1, 2), (2, 4), (3,6) ... (-1, -2), (-2, -4) ...

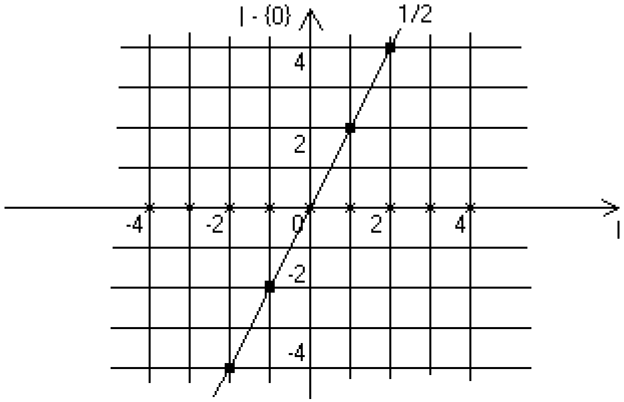
perché immaginando di fare la **divisione** fra la prima coordinata e la seconda otteniamo lo **stesso quoziente**. Infatti :

1 / 2 = 2 / 4 = 3 / 6 = ... = -1 / -2 = -2 / -4 = 0,5 .

Indichiamo allora con 1/2 la classe di equivalenza formata dalle suddette coppie ordinate. Scriviamo cioè :

[1/2] = {... (-2, -4), (-1, -2), ..., (1, 2), (2, 4), (3, 6) ...} = 1/2 .

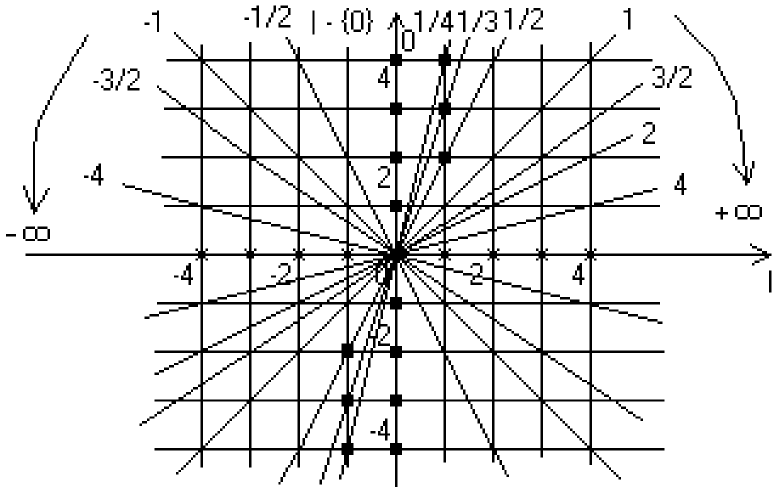
Graficamente :



Si noti che abbiamo escluso con delle crocette tutte le coppie ordinate con zero come seconda coordinata.

Abbiamo in questo modo "costruito" il numero razionale 1/2 .

Analogamente otterremo gli altri numeri razionali



Si noti che se la divisione fra due numeri interi è "esatta" si ottiene ancora un numero intero.

Si noti anche che il numero 0 è la seguente classe di equivalenza :

$$[0] = \{\dots (0, -2), (0, -1), \dots, (0, 1), (0, 2), (0, 3) \dots\} = 0$$

perché 0 diviso per qualsiasi numero (diverso da 0) dà sempre 0 . Il numero 0 sarà allora l'insieme
delle coppie ordinate che stanno sulla retta verticale che passa per (0, 0) .

Tutti i numeri razionali si definiscono quindi come classi di equivalenza corrispondenti alle rette che passano
per l'origine così come indicato nel grafico.

I numeri Razionali

I numeri razionali positivi corrisponderanno a rette oblique pendenti verso destra, mentre i numeri razionali negativi corrisponderanno a rette oblique pendenti verso sinistra.

Si osservi sul grafico come la pendenza vari al crescere dei numeri razionali in senso positivo e negativo.

La retta orizzontale passante per la coppia ordinata (0, 0) è stata esclusa a priori e quindi non corrisponde
a nessun numero razionale.

Essa è determinata dalle coppie ordinate che hanno come seconda coordinata il numero zero, cioè :

(-3, 0), (-2, 0), (-1, 0), (0, 0), (1, 0), (2, 0), (3, 0), ...

Tutte queste coppie ordinate corrisponderebbero alle seguenti divisioni :

... -3 / 0, -2/0, 0, -1/0, 0 / 0, 1 / 0, 2 / 0, 3 / 0, ...

le quali non **hanno senso**, non si possono eseguire perché se per esempio facessi :

1 / 0

dovrei trovare come risultato un numero che moltiplicato per 0 mi ritornasse 1 e questo è **impossibile**,
perché tutti i numeri moltiplicati per 0 danno 0 .

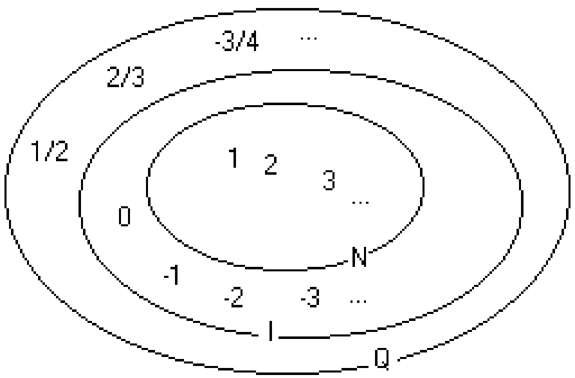
Anche la divisione 0 / 0 non si può fare. Infatti il risultato dovrebbe essere un numero che moltiplicato
per 0 dovrebbe darmi 0 . Siccome tutti i numeri moltiplicato per 0 danno 0 , il risultato sarebbe **indeterminato**.

I numeri Razionali

L'insieme dei **numeri razionali** è allora l'insieme di tutte le **frazioni** a denominatore non nullo che si possono fare prendendo **due numeri interi qualsiasi** (sempre escludendo lo zero al denominatore). Esso si indica con la lettera Q e si può rappresentare come :

$$Q = \left\{ \frac{m}{n} ; m \in I, n \in I, n \neq 0 \right\}$$

Siccome, in certi casi, le frazioni danno per risultato un numero intero, si ha :



Si dice allora che Q è una estensione di I .

I numeri Razionali come numeri decimali

I **numeri razionali** sono **rapporti** (divisioni) fra **numeri interi**. Un numero razionale si ottiene quindi facendo :

$$\frac{m}{n}$$

dove m ed n sono due numeri interi qualunque eccetto che per il **denominatore** n che deve essere
sempre **diverso da zero**.

Dividere per zero, bisogna sempre ricordarlo, è una operazione **proibita**, perché non si otterrebbe nessun
risultato definito.

Oltre alle frazioni, vi è un altro modo di indicare i numeri razionali. Essi sono rappresentabili come **numeri**
decimali che si ottengono facendo la **divisione** fra il numeratore m ed il denominatore n .

Per esempio :

$$\frac{1}{2} = 0{,}5 \quad ; \quad \frac{3}{2} = 1{,}5 \quad ; \quad \frac{-4}{5} = -0{,}8 \quad ; \quad \frac{-10}{-4} = 2{,}5$$

I numeri Razionali come numeri decimali

Si noti che sono numeri razionali anche le **frazioni esatte**, ciò quelle che hanno un risultato intero (perché i numeri interi sono sottoinsieme di numeri razionali) :

$$\frac{10}{2} = 5 \;\; ; \;\; \frac{4}{1} = 4$$

Si noti anche che le frazioni con **zero ad numeratore** (mentre il denominatore è diverso da zero) valgono zero :

$$\frac{0}{3} = 0 \;\; ; \;\; \frac{0}{1} = 0$$

mentre, non ci stancheremo mai di ricordarlo, sono **proibite** tutte le frazioni che hanno zero al denominatore :

$$\frac{0}{0} \;\; ; \;\; \frac{3}{0} \;\; ; \;\; \frac{4}{0}$$

I numeri Razionali come numeri decimali

Prendendo una qualunque frazione di numeri interi e facendo la divisione si possono avere **due tipi** di risultati. I **numeri decimali** che si ottengono possono avere un **numero finito di decimali** (dopo la virgola) oppure un **numero infinito di decimali** ma **periodici**, cioè che si ripetono indefinitamente.
Ecco un esempio per ciascun caso :

$$\frac{1}{2} = 0{,}5 \quad ; \quad \frac{1}{3} = 0{,}333\ldots = 0{,}\overline{3}$$

Il trattino indica il gruppo di numeri che si ripetono indefinitamente.

I numeri periodici possono essere più "complicati" dell'esempio dato sopra. Per esempio, in

$$23{,}4527\overline{8032}$$

a ripetersi indefinitamente è il gruppo di numeri 8032

Ogni frazione di numeri interi, ovvero ogni numero razionale, è rappresentabile quindi da un numero decimale
con un numero finito di decimali oppure con un numero infinito di decimali ma periodici.

Chiediamoci allora : esiste la possibilità di avere numeri decimali con **infiniti decimali non periodici** ?

La risposta è affermativa e questi numeri decimali, che non corrispondono a numeri razionali, si chiamano **numeri irrazionali**.

I numeri Irrazionali

I **numeri irrazionali** allora sono numeri che non corrispondono a **nessuna frazione di numeri interi**. Un esempio eclatante di un tale numero è la **radice quadrata di 2** . Essa vale :

$$\sqrt{2} = 1{,}41421356\ldots$$

Si tratta di un numero con **infiniti decimali non periodici** ed esso non corrisponde a nessuna frazione di
numeri interi.

Un altro esempio importante di numero irrazionale è il numero p-greco :

$$\pi = 3{,}14159265\ldots$$

Si noti che i numeri irrazionali sono in numero **infinito**.

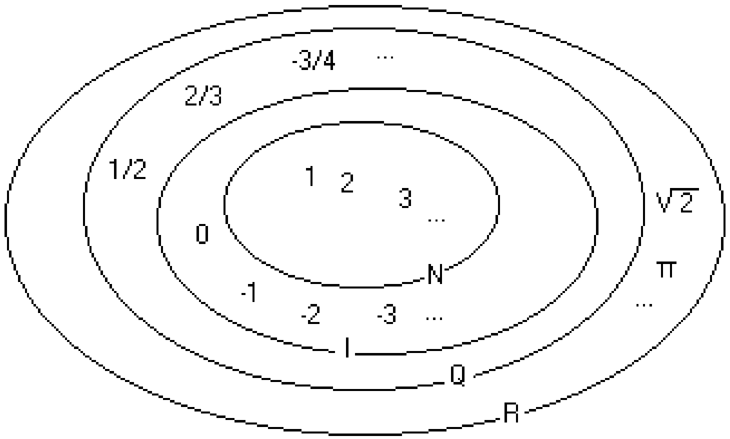
I numeri Reali

L'**unione dei numeri razionali con i numeri irrazionali** forma l'insieme dei **numeri reali** che si denota con
la lettera R . Quindi :

$$R = Q \bigcup Irrazionali$$

(di solito i numeri irrazionali non si indicano con un simbolo specifico).

I numeri reali R costituiscono quindi una **estensione** dei numeri razionali Q per cui :



I numeri Reali

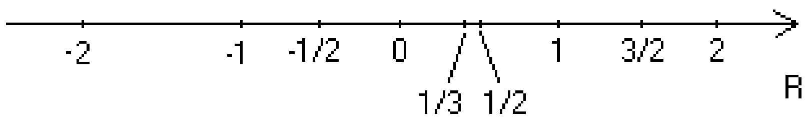
Sui numeri reali R si possono fare le **4 operazioni** +, -, · , / .

I numeri reali hanno una fondamentale proprietà : **essi "ricoprono" completamente una retta orientata**.

In altre parole : **ogni numero reale corrisponde ad un punto di una retta orientata ed ogni punto di una retta orientata corrisponde ad un numero reale**

ovvero : **fra i numeri reali ed i punti di una retta orientata vi è una corrispondenza (funzione) biunivoca.**

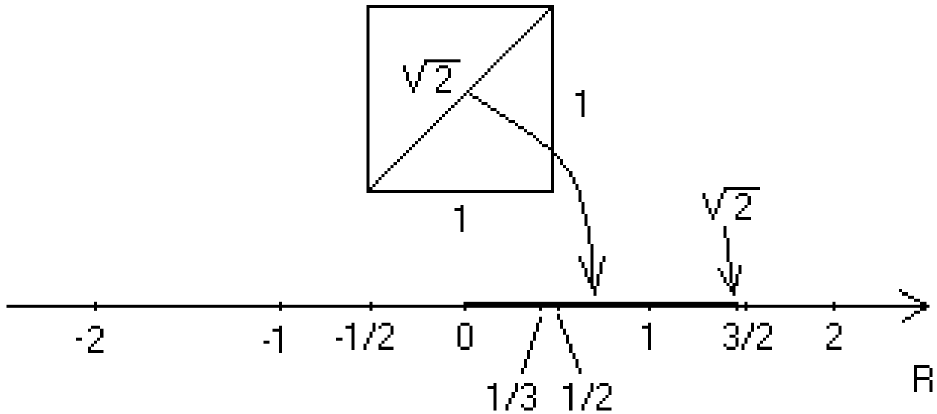
Se prendiamo una retta orientata (dotata di un verso, quello indicato dalla freccia) e vi poniamo in un punto il numero 0 (chiamandolo l'**origine** della retta orientata), i **numeri razionali** ve li possiamo disporre sopra molto semplicemente come indicato in figura :



I numeri Reali

Come porre su una retta orientata i **numeri irrazionali** ? Facciamo l'esempio della radice quadrata di 2 .

Prendiamo un quadrato di lato uguale ad 1 e consideriamo la sua diagonale. Per il teorema di Pitagora
essa vale appunto la radice quadrata di 2 . Trasportando detta diagonale sulla retta orientata, avremo posizionato su di essa il numero irrazionale $\sqrt{2}$



La retta, con "sopra" tutti i numeri reali, si chiama **retta reale**.

FINE