Università degli studi di Brescia
Facoltà di Medicina e Chirurgia
Corso di Laurea in Infermieristica

Corso propedeutico di Matematica e Informatica
a.a. 2006/2007

Docente

Ing. Andrea Ghedi

Lezione 2

IL PIANO CARTESIANO

Il piano cartesiano

In un piano consideriamo due rette perpendicolari che chiamiamo con x e y, orientate nel senso che stabiliamo un verso di percorrenza.

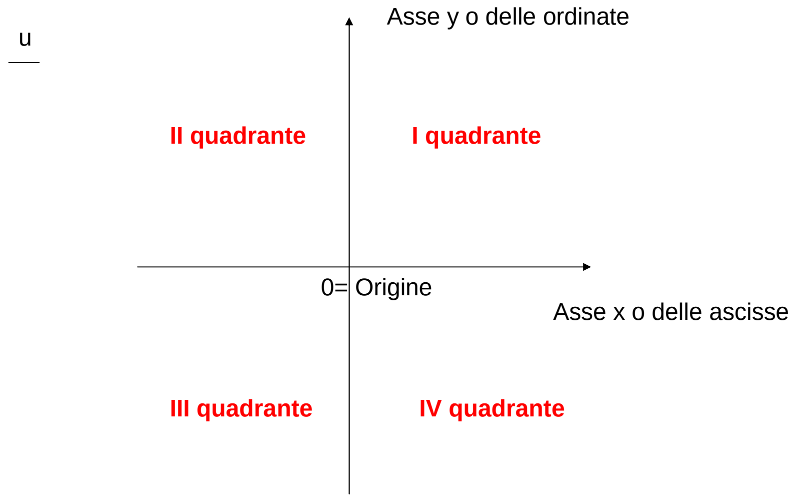
Solitamente, disegniamo la retta x orizzontalmente e orientata da sinistra a destra, la retta y verticalmente e orientata dal basso verso l'alto.

Le due rette si chiamano assi coordinati e il loro punto d'intersezione O origine.
Stabiliamo, infine, una unità di misura, u che ci consente di misurare le lunghezze sui due assi.

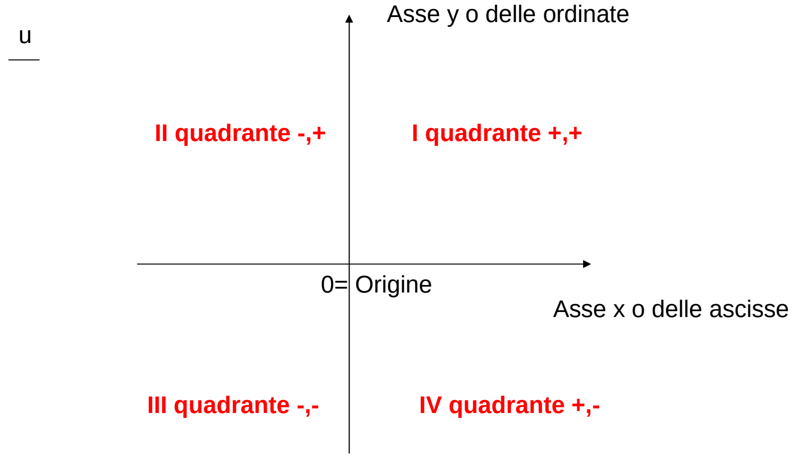
In matematica, si prende la stessa unità di misura per l'asse x e per l'asse y.
Nelle applicazioni fisiche, chimiche, economiche, non sempre si segue questa convenzione.

Si dice che nel piano è stato fissato un sistema di riferimento cartesiano,
o che il piano è riferito a un sistema di assi cartesiano xOy, o che si è fissato un piano cartesiano.

Il piano cartesiano

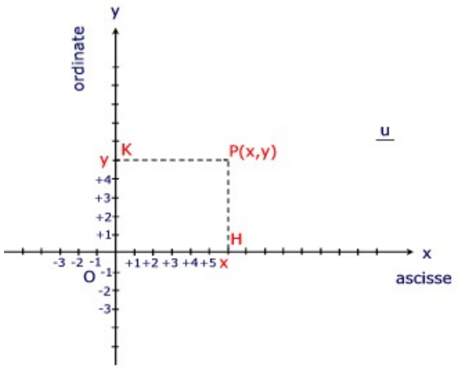


Il piano cartesiano, segni



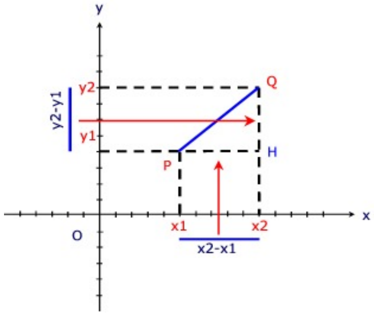
L'origine O, punto di intersezione degli assi, ha coordinate (0,0).
I punti dell'asse x, come H, hanno ordinata nulla, quindi H(x,0).
I punti dell'asse y, come K, hanno ascissa nulla, quindi K(0.y).

Punti nel piano cartesiano



- A questo punto è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca trapunti del piano P e le coppie di numeri reali (x,y). Dal punto P si tracciano le parallele PH all'asse y e PK all'asse x. Misurando OH, con l'unità di misura u otteniamo il numero x, l'ascissa; misurando OK, con la stessa unità di misura, otteniamo il numero y, l'ordinata. La coppia di numeri (x,y) si chiamano coordinate del punto P.
- Viceversa, assegnata una coppia di numeri reali (x,y), individuiamo prima il punto H, poi il punto K, infine, tracciando le due parallele agli assi, si ottiene il punto P.

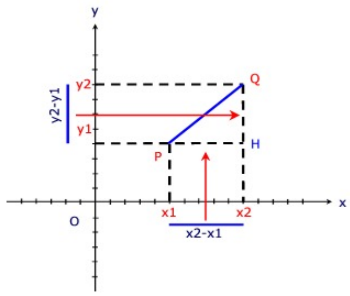
Distanza tra due punti



Applicando il teorema di Pitagora al triangolo PHQ, rettangolo in H si ottiene che:

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

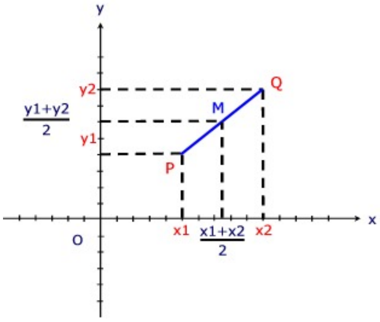
Distanza tra due punti:casi particolari



- I due punti individuano un segmento parallelo all'asse x, come PH. La distanza si calcola più rapidamente con la formula **|x2-x1|**.
- I due punti individuano un segmento parallelo all'asse y, come QH. La distanza si calcola più rapidamente con la formula **|y2-y1|**.

Corso propedeutico di Matematica e Informatica
a.a. 2006/2007 Ing. Andrea Ghedi

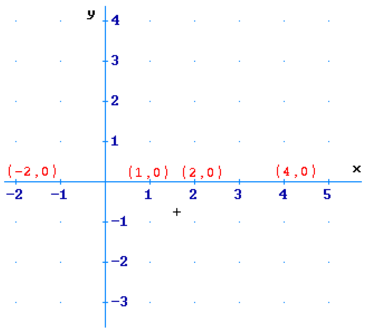
Punto medio



M=(Xa+Xb)/2;(Ya+Yb)/2

La retta (asse delle x)

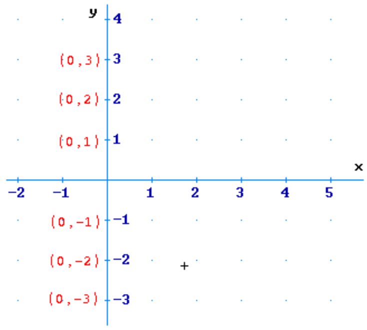
y=0



L'asse delle *x* è il luogo dei punti del piano aventi ordinata nulla.

La retta (asse delle y)

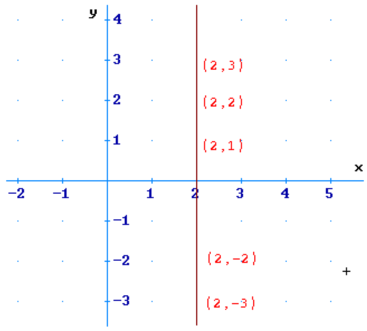
x=0



L'asse delle *y* è il luogo dei punti del piano aventi ascissa nulla.

La retta parallela all' asse y

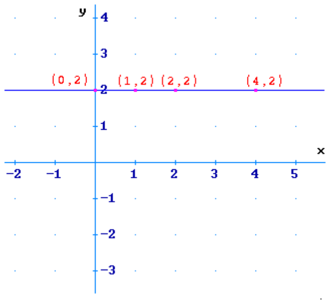
x=h



Una retta parallela all'asse delle *y* è il luogo dei punti del piano aventi ascissa costante.

La retta parallela all’asse x

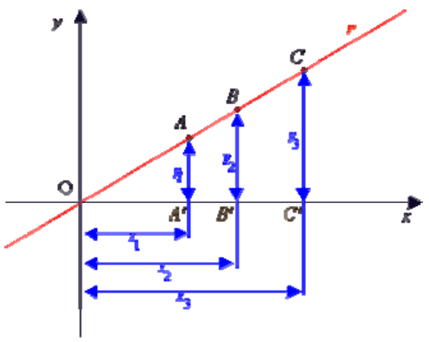
y=k



Una retta parallela all'asse delle *x* è il luogo dei punti del piano aventi ordinata costante.

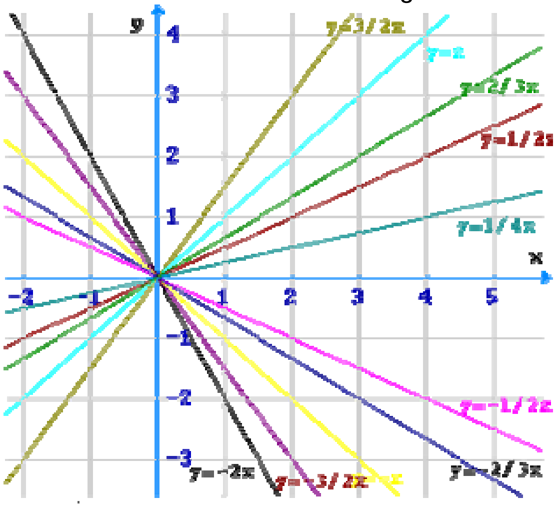
La retta passante per l’origine

y=mx



La costante ***m*** viene detta **coefficiente angolare** ed esprime l'inclinazione o la pendenza della retta

La retta: il coefficiente angolare



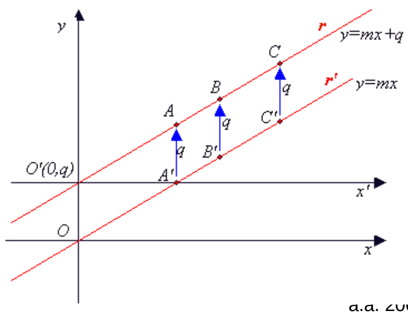
Se la retta sta nel I e III quadrante, il suo coefficiente angolare è positivo.
Se la retta sta nel II e IV quadrante, il suo coefficiente angolare è negativo.

La retta

Indicato con $O'(0, q)$ il punto in cui r incontra l'asse y, eseguiamo una traslazione di assi che porti l'origine nel nuovo sistema di riferimento $x'O'y'$. Si ottiene:

$$\boxed{y=mx+q}$$

che è l'equazione di r rispetto al sistema di riferimento iniziale xOy. La costante **m** viene ancora chiamata **coefficiente angolare** e **q** viene detta **intercetta** o **ordinata all'origine**, e rappresenta l'ordinata del punto di intersezione della retta r con l'asse y.



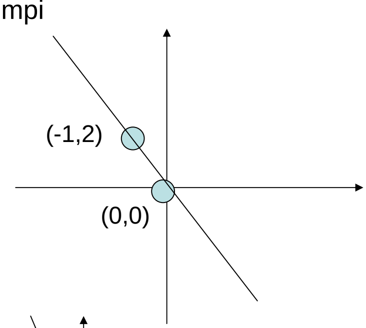
La retta: esempi

Graficare la retta: **2x+y=0**

Come faccio??

Trovo due punti,

x	y
0	0
-1	2

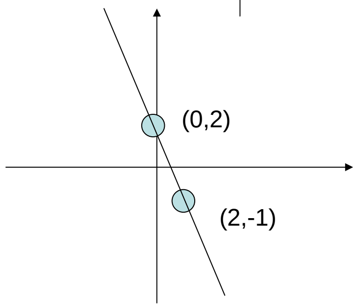


Graficare la retta: **3x+2y-4=0**

Come faccio??

Trovo due punti,

x	y
0	2
2	-1



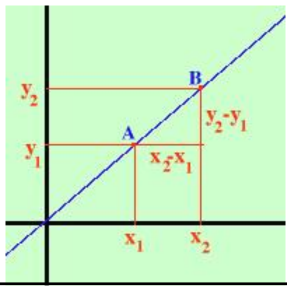
Come si determina m Esempio 1

In pratica m e' uguale al rapporto y/x quindi per determinarlo bastera' che io faccia il rapporto fra un segmento vericale ed il corrispondente segmento orizzontale. Quindi considero i punti:
A = (x1, y1)   B = (x2, y2)

Traccio le coordinate: poiche' devo fare y/x posso fare la differenza verticale tra A e B fratto la differenza orizzontale fra A e B quindi:

$$m = \frac{y2 - y1}{x2 - x1}$$

questa e' una formula molto importante che avremo spesso occasione di usare per qualunque retta e non solo per la retta passante per l'origine



Come si determina m Esempio 2

Trovare il coefficiente angolare della retta che passa per i punti A=(2,4) B=(3,6)

essendo

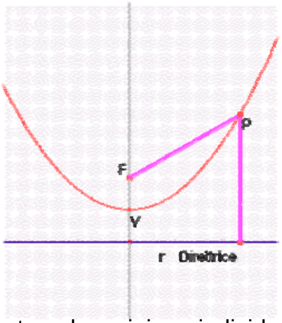
x1= 2   y1= 4   x2= 3   y2= 6

sara'

$$m = \frac{y2 - y1}{x2 - x1} = \frac{6 - 4}{3 - 2} = 2$$

La parabola

La parabola è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto detto fuoco e da una retta detta direttrice.



La parabola è tutta posta nel semipiano individuato da *r* e contenente il fuoco

la parabola ha un'*asse* di simmetria che coincide con la retta perpendicolare alla direttrice passante per *F*

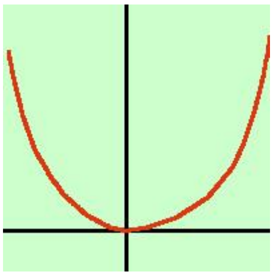
Il vertice della parabola è equidistante da fuoco e direttrice

La parabola

La parabola si puo' presentare nella forma:

$$y = ax^2$$

Per tracciarla basta ricordare che si tratta della parabola con vertice nell'origine e con concavita' (come nella figura) verso l'alto se $a > 0$, altrimenti la concavita' e' verso il basso



La parabola (formula generale)

La parabola si puo' presentare nella forma:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Per procedere al garfico conviene procedere così:

1. trovare le coordinate del vertice
2. trovare (se esistono) le intersezioni con l'asse x
3. trovare l' intersezione con l'asse delle y
4. unire in un grafico i punti trovati

La parabola (esempio 1)

Graficare la funzione:

$$y = x^2 + 2x - 8$$

Seguiamo questo schema

- Trovare le coordinate del vertice

$V_x=-(b/2a)$ $V_y=((b^2-4ac)/4a)$
$V_x=-1$ $V_y=-9$

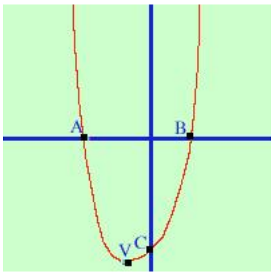
- Trovare (se esistono) le intersezioni con l'asse x

Sistema con y=0 (A e B)

- Trovare l' intersezione con l'asse delle y

Sistema con x=0 (C)

Unire in un grafico i punti trovati



La parabola (esempio 2)

Rappresentare graficamente la parabola di equazione
$y = x^2 - 6x + 8$

1) Troviamo le coordinate del vertice

abbiamo
a = 1
b = -6
c = 8

Calcoliamo la coordinata x del vertice: V_x

$$V_x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2} = 3$$

Calcoliamo la coordinata y del vertice: V_y

$$V_y = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{(-6)^2 - 4(1)(8)}{4} = -1$$

Otteniamo quindi:
V = (3; -1)

2) troviamo l'intersezione C con l'asse y

teoricamente dovremmo fare il sistema fra l'asse y (equazione x=0) e la parabola; pero' e' sufficiente prendere come prima coordinata 0 e come seconda coordinata il termine noto della parabola

C = (0; 8)

3) troviamo le intersezioni con l'asse x, se esistono

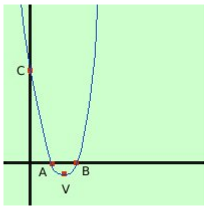
Devo fare il sistema fra la parabola e l'equazione dell'asse x (y=0)

$$\begin{cases} y = x^2 - 6x + 8 \\ y = 0 \end{cases}$$

sostituisco

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 8 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

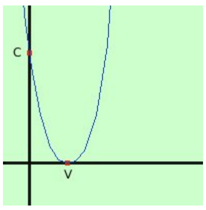
$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases}$$



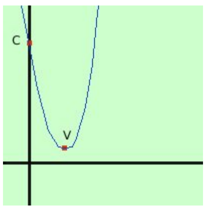
quindi avremo A=(2,0) B=(4,0)

Svolgere per esercizio

$$y = x2 - 6x + 9$$



$$y = x2 - 6x + 10$$



La circonferenza

La circonferenza è costituita da tutti e i soli punti che abbiano una stessa distanza prefissata da un punto detto centro. Il segmento che unisce un punto generico con il centro si chiame raggio,per definizione la lunghezza di questo segmento è costante.

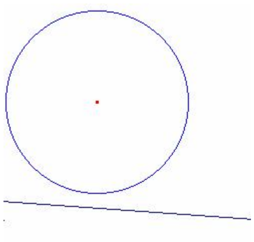
$$x^2 -2\alpha x+\alpha^2 +y^2 -2\beta y+\beta^2+ r^2 =0$$

Posto $a=-2\alpha$; $b=-2\beta$; $c=\alpha^2+\beta^2-r^2$ ottengo

$$\boxed{y^2+ x^2+ax+by+c =0}$$

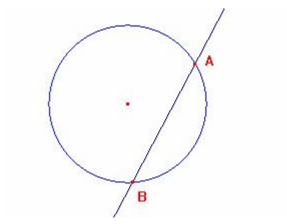
Quindi il centro C è $c(\alpha;\beta)$ ed il raggio è pari a r

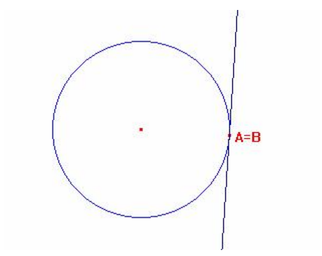
La circonferenza e la retta



Esterna

Secante

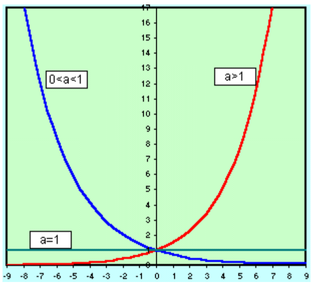




Tangente

La funzione esponenziale

Nella funzione esponenziale la variabile indipendente compare a esponente di una potenza: y = ax Notare che la base **a** della potenza deve essere sempre positiva in quanto la potenza risulta definita solo se la base è positiva. Se infatti infatti si considera **a = -3** dando ad **x** il valore **1/2**, si ottiene **y(1/2) = RADQ(-2)** che nel campo reale non ha senso.
Inoltre, per **a = 1** la funzione per un qualunque valore di **x** diventa y = 1 il cui grafico è una **retta**.



Esempio Excel

Funzione Log (logaritmo)

Consideriamo quindi anche noi due particolari progressioni numeriche e precisamente: 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 e 1, 4, 16, 64, 256, 1.024, 4.096, 16.384, 65.536. La prima serie di numeri che abbiamo scritto si chiama *progressione aritmetica* ed è caratterizzata dal fatto che ciascun termine si ottiene aggiungendo 2 al precedente. La seconda serie di numeri si chiama *progressione geometrica* ed è caratterizzata dal fatto che ciascun termine si ottiene dal precedente moltiplicandolo per 4. In generale, in una progressione aritmetica è sempre costante la differenza fra ciascun termine (escluso il primo) e il suo precedente e in una progressione geometrica è sempre costante il quoziente fra ciascun termine (escluso il primo) e il suo precedente. Questi valori costanti si chiamano *ragione* delle rispettive progressioni.

Prendiamo ora due termini qualsiasi della prima progressione scritta sopra, ad esempio il 4 e il 12, sistemati rispettivamente al 3° e al 7° posto e sommiamoli; si ottiene 16, un numero che occupa il 9° posto della serie. Se adesso consideriamo i termini che nella seconda progressione si trovano sistemati anch'essi al 3° e al 7° posto, cioè il 16 e il 4.096 e li moltiplichiamo otteniamo un numero, 65.536, che occupa lo stesso posto, il nono, che nella prima progressione occupava la somma.
Facciamo un altro esempio. Prendiamo il 6 che è sistemato al 4° posto della prima progressione e sottraiamolo dal 14 che sta all'8° posto; otteniamo 8, un numero che occupa il 5° posto della serie. Passiamo ora alla seconda progressione e dividiamo i due numeri sistemati, come i precedenti, rispettivamente all'ottavo e al quarto posto cioè 16.384 e 64; otteniamo 256, cioè un numero che ancora una volta occupa il 5° posto, esattamente dove si trovava l'8 (il risultato della sottrazione) all'interno della progressione aritmetica.

Il procedimento apparentemente laborioso che abbiamo illustrato serve a chiarire che le operazioni di moltiplicazione e di divisione, più difficili da eseguire, possono essere sostituite da quelle di addizione e sottrazione concettualmente più facili. Ebbene, i logaritmi sono proprio questo: servono a semplificare i calcoli. Vediamo quindi di definire con maggiore precisione questi nuovi strumenti di calcolo che abbiamo appena individuato.

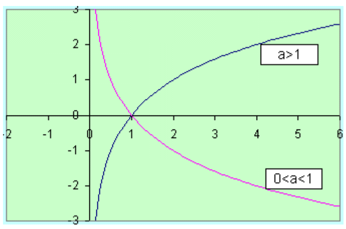
Per farlo dobbiamo prima riscrivere la progressione geometrica utilizzata sopra in modo diverso e cioè come segue: 20, 22, 24, 26, 28, 210, 212, 214, 216. Ciascun elemento della serie ora appare espresso sotto forma di potenza. Una potenza, come sappiamo, è costituita da un numero chiamato base (il 2 nel nostro esempio) elevato ad un altro numero chiamato esponente. E' facile verificare che i termini della progressione rappresentati sotto forma di potenze corrispondono a quelli della progressione geometrica scritta sopra: 20 = 1, 22 = 4, 24 = 16, 26 = 64 e così via. Si noti inoltre che gli esponenti dei termini della nuova progressione (0, 2, 4, 6 ecc.) sono gli stessi numeri che compaiono nella progressione aritmetica scritta all'inizio.

Ora possiamo dare la definizione completa di logaritmo: "Il logaritmo di un numero in una certa base è l'esponente a cui bisogna innalzare la base per ottenere il numero stesso". Ad esempio, il logaritmo di 100 in base 10 è 2 perché 10^2 fa 100. In simboli il nostro logaritmo si scrive nel modo seguente: log10100 = 2. Si noti che il logaritmo è semplicemente l'esponente di una potenza e che le due eguaglianze log10100 = 2 e 102 = 100 sono equivalenti.

Per comprendere in che modo i logaritmi sono in grado di rendere più semplici i calcoli basta notare che esprimendo i numeri sotto forma di potenze la moltiplicazione e la divisione si riducono a semplici somme e sottrazione di esponenti (ad esempio, la moltiplicazione di 10.000 per 1.000 si trasforma semplicemente in 104 · 103 = 104+3 = 107) e l'elevamento a potenza e l'estrazione di radice diventano una semplice operazione di moltiplicazione e di divisione degli esponenti (ad esempio la radice cubica di 1.000.000 è 106/3 = 102

La funzione logaritmo

Sappiamo che l'equazione **ax = b** con **a > 0**, **a <> 1**, e **b > 0** ammette una e una sola soluzione reale. Per esempio la soluzione dell'equazione 2x = 8 è razionale (x = 3); la soluzione dell'equazione 2x = 5 è irrazionale.
Il problema di determinare la soluzione irrazionale di questa equazione si può porre nel modo seguente: **determinare il valore da dare come esponente al numero 2 per ottenere il numero 5.** La soluzione di questo problema viene sintetizzata con l'espressione **x = log2 5**, che si legge: x uguale al logaritmo in base 2 di 5.
In generale, l'equazione ax = b ha per soluzione: x = loga b .



Esempio Excel

La funzione logaritmo: esempio

La crescita non risulta però essere costante nel tempo infatti, se si analizza una colonia per un breve arco di tempo si ottiene un curva di crescita, derivante dalla relazione tra relazione tra il tempo (ascisse) e il logaritmo del numero di batteri (ordinate).

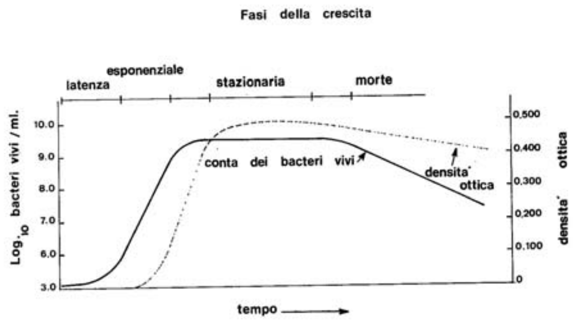


Fig. 54 -La curva di crescita dei batteri in terreno liquido.

FINE

Corso propedeutico di Matematica e Informatica
a.a. 2006/2007 Ing. Andrea Ghedi